Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 04.01.2016**

Erinnerung: *Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*

Beispielaufgabe 1: Matrixinversion

Berechnen Sie jeweils die Inverse der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe 2: Drehmatrizen in 3 Dimensionen

Rotationen in drei Dimensionen werden durch 3×3 Matrizen dargestellt. $R_\Theta(\mathbf{n})$ sei die Drehmatrix die eine Drehung mit dem Winkel Θ um eine Drehachse beschreibt, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\mathbf{n}$ gegeben ist.

a) Finden Sie dir drei Drehmatrizen $R_\Theta(\mathbf{e}_i)$ für Drehungen um die drei Koordinatenachsen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ explizit, indem Sie wie folgt vorgehen: Machen Sie für $i = 1, 2$ und 3 jeweils eine Skizze, die die Wirkung $\mathbf{e}_j \to \mathbf{e}'_j$ der Rotation um die i-Achse auf die drei Basisvektoren $\mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ veranschaulicht (z.B. für $\Theta = \frac{\pi}{6}$). Die Bildvektoren $\mathbf{e}'_j$ der Basisvektoren $\mathbf{e}_j$ liefern die Spalten der gesuchten Drehmatrizen.

b) Es kann gezeigt werden, dass für eine allgemeine Richtung $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ der Drehachse die Matrixelemente der Drehmatrix wie folgt lauten:

$$(R_\Theta(\mathbf{n}))_{ij} = \delta_{ij} \cos\Theta + n_i n_j (1 - \cos\Theta) - \epsilon_{ijk} n_k \sin\Theta \qquad (\epsilon_{ijk} = \text{Levi-Cevita-Tensor}).$$

Finden Sie mittels dieser Formel die drei Drehmatrizen $R_\Theta(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Sind Ihre Ergebnisse konsistent mit denen aus (a)?

c) Bestimmen Sie folgende Drehmatrizen explizit und berechnen und skizzieren Sie deren Wirkung auf den Vektor $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^T$:

   i) $A = R_\pi(\mathbf{e}_3)$

   ii) $B = R_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1)\right)$.

d) Rotationsmatrizen bilden eine Gruppe. Zeigen Sie anhand von A und B aus (c), dass diese Gruppe nicht kommutativ ist (im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall!)

e) Zeigen Sie, dass für die allgemeine Drehmatrix R die Beziehung $\mathrm{Tr}(R) = 1 + 2\cos\Theta$ gilt, wobei die 'Spur' (Englisch: 'Trace') einer Matrix definiert ist durch $\mathrm{Tr}(R) = \sum_i R_{ii}$.

f) Das Produkt zweier Rotationsmatrizen liefert wieder eine Rotationsmatrix. Bestimmen Sie für das Produkt $C = AB$ der Matrizen aus (c) den zugehörigen Einheitsvektor $\mathbf{n}$ und Drehwinkel Θ. *Hinweis:* Diese sind nur bis auf ein beliebiges Vorzeichen eindeutig bestimmt, denn $R_\Theta(\mathbf{n})$ und $R_{-\Theta}(-\mathbf{n})$ beschreiben dieselbe Rotation. (Um das Vorzeichen konkretheitshalber festzulegen, wählen wir die Komponente n_2 positiv). $|\Theta|$ und $|n_i|$ werden durch die Spur bzw. die Diagonalelemente der Drehmatrix festgelegt; ihre relativen Vorzeichen durch die Nicht-Diagonalelemente.

Aufgabe 1: komplexe Zahlen *(8 Punkte)*

Es sei $z = 3 + 4i$

a) Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\bar{z}$ und $|z|$. *(2 Punkte)*

b) Zeichnen Sie z, $\bar{z}$, $-z$ und $-\bar{z}$ in der komplexen Ebene. *(2 Punkte)*

c) Vervollständigen Sie die folgenden Sätze indem Sie z, $\bar{z}$, $-z$ oder $-\bar{z}$ einfügen:

   i) Die Reflexion von z an der x-Achse ist gegeben durch .... *(0,25 Punkte)*

   ii) Die Reflexion von z an der y-Achse ist gegeben durch .... *(0,25 Punkte)*

   iii) Die Reflexion von z am Ursprung ist gegeben durch .... *(0,5 Punkte)*

d) Sei $z = 4 - 2i$ und $w = 3 + 5i$. Berechnen Sie

   i)* $z + w$ *(0,5 Punkte)*

   ii)* $z - \bar{w}$ *(0,5 Punkte)*

   iii)* $z\bar{z}$ *(0,5 Punkte)*

   iv) $z\bar{z} - |z|^2$ *(0,5 Punkte)*

   v) zw *(0,5 Punkte)*

   vi) $\overline{5i\bar{z} + (1+i)w}$ *(0,5 Punkte)*

Aufgabe 2: Basistransformation und lineare Abbildung in $\mathbb{E}^2$ *(12 Punkte)*

Anmerkung zur Notation: In dieser Aufgabe werden Vektoren im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^2$ durch Hütchen gekennzeichnet (z.B. $\hat{\mathbf{v}}_j, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{e}}_1 \in \mathbb{E}^2$). Die Komponenten dieser Vektoren bezüglich einer gegebenen Basis sind Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und tragen keine Hütchen (z.B. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$). Der Euklidische Vektorraum $\mathbb{E}^2$ habe zwei Basen, eine alte, $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$ und eine neue, $\{\hat{\mathbf{v}}'_i\}$ mit

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{5}\hat{\mathbf{v}}'_1 + \frac{3}{5}\hat{\mathbf{v}}'_2, \qquad \hat{\mathbf{v}}_2 = -\frac{6}{5}\hat{\mathbf{v}}'_1 + \frac{2}{5}\hat{\mathbf{v}}'_2$$

a) Die Relation $\hat{\mathbf{v}}_i = \sum_j t_{ij}\hat{\mathbf{v}}'_j$, drückt die alte durch die neue Basis aus. Finden Sie die Transformationsmatrix $T = t_{ij}$ *(1,5 Punkte)*

b) Finden Sie die Matrix T^{-1} und drücken Sie mittels der Rücktransformation $\hat{\mathbf{v}}'_i = \sum_j t^{-1}_{ij}\hat{\mathbf{v}}_j$ die neue durch die alte Basis aus. *(1.5 Punkte)*

c) Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ habe Komponenten $\mathbf{x} = (2, -1/2)^T$ in der alten Basis. Wie lauten seine Komponenten $\mathbf{x}'$ in der neuen Basis? *(1,5 Punkte)*

d) Der Vektor $\hat{\mathbf{y}}$ habe Komponenten $\mathbf{y}' = (-3, 1)^T$ in der neuen Basis. Wie lauten seine Komponenten $\mathbf{y}$ in der alten Basis? *(1,5 Punkte)*

e) Die lineare Abbildung $\hat{A}$ sei definiert durch $\hat{\mathbf{v}}_1 \to \frac{1}{3}(\hat{\mathbf{v}}_1 - 2\hat{\mathbf{v}}_2)$ und $\hat{\mathbf{v}}_2 \to -\frac{1}{3}(4\hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_2)$. Finden Sie zunächst ihre Matrixdarstellung A in der alten Basis und dann mittels einer Basistransformation ihre Matrixdarstellung in der neuen Basis. *(1,5 Punkte)*

f)* $\hat{\mathbf{z}}$ sei der Bildvektor, auf den $\hat{A}$ den Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ abbildet: $\hat{\mathbf{x}} \to \hat{\mathbf{z}}$. Finden Sie mittels A seine Komponenten $\mathbf{z}$ bezüglich der alten Basis und mittels A' seine Komponenten $\mathbf{z}'$ bezüglich der neuen Basis. Sind Ihre Ergebnisse für $\mathbf{z}$ und $\mathbf{z}'$ Konsistent? *(1,5 Punkte)*

g)* Wählen Sie nun für die alte Basis $\hat{\mathbf{v}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_2 = 2\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$, wobei $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0)^T$ und $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1)^T$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{E}^2$ sind. Wie lauten $\hat{\mathbf{v}}'_1, \hat{\mathbf{v}}'_2, \hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ in der Standarbasis von $\mathbb{E}^2$? *(1,5 Punkte)*

h)* Machen Sie eine Skizze (mit $\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\hat{\mathbf{e}}_2$ als Einheitsvektoren in die horizontale bzw. vertikale Richtung), die die alten und neuen Basisvektoren zeigt, sowie die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$. Sind die in (c) und (f) diskutierten Koordination dieser Vektoren bezüglich beider Basen mit Ihrer Skizze konsistent? *(1,5 Punkte)*

Aufgabe 3: Lineare Abbildungen und Basistransformation in $\mathbb{R}^3$ (*10 Punkte*)

Betrachen Sie die folgenden drei linearen Abbildungen in $\mathbb{R}^3$, mit Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

A: Linksrotation um die erste Achse um den Winkel $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$.

B: Streckung der Achsen 1 und 2 um die Faktoren $s_1 = 2$ und $s_2 = 4$.

C: Spiegelung in der 23-Ebene.

(a) Finden Sie die Matrixdarstellungen von A, B, C. Welche dieser Abbildungen kommutieren miteinander? (*3 Punkte*)

(b) Was ist das Bild $\mathbf{y} = CA\mathbf{x}$ des Vektors $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ unter der Abbildung CA? (*1 Punkt*)

(c) Finden Sie den Vektor $\mathbf{z}$ der unter Verknüpfung aller drei Abbildungen, $D = CBA$ auf $\mathbf{y}$ abgebildet wird. (*2 Punkte*)

(d)* Betrachten Sie nun eine neue Basis $\{\mathbf{v}_i\}$, die durch Rotation und Spiegelung mittels $T \equiv CA$ auf die Standardbasis abgebildet wird, $CA\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$. Skizzieren Sie die alten und neuen Basisvektoren in derselben Skizze. (*1 Punkt*)

(e)* Stellen Sie $\mathbf{z}$ und $\mathbf{y}$ in der neuen Basis dar. (*1 Punkt*)

(f)* D_v sei die Darstellung von D in der neuen Basis. Finden Sie D_v durch entsprechende Transformation der Matrix D, und nutzen Sie das Ergebnis, um das Bild $\mathbf{y}_v$ von $\mathbf{z}_v$ unter D_v zu berechnen. (Stimmt das Ergebnis mit dem aus (e) überein?). (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Inversion von 3x3 Matrizen (*10 Punkte*)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

eine beliebige invertierbare 3×3 Matrix. Zeigen Sie, dass:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie $D = D(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ explizit. Für nicht invertierbare Matrizen verschwindet D.

Wir wünschen Ihnen allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!