Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 8

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 11.01.2016**

***Erinnerung**: Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*

Beispielaufgabe 1: Diagonalisierung reller 2×2 Matrizen

Finden Sie für folgende reellen Matrizen die Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{R}$, Eigenvektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^2$ und die Ähnlichkeitstransformation S sowie deren Inverse S^{-1}, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist.

$$\text{(a)}\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \ B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe 2: Diagonalisierung einer Matrix, die eine Variable enthält

Gegeben ist die von der Variable $x \in \mathbb{R}$ abhägige Matrix $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3-x & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Eigenwerte λ_j und die Eigevektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$ von A.
Hinweis: Einer der Eigenwerte ist $\lambda = x$.

Aufgabe 1: Diagonalisierung von Matrizen – Rechenbeispiele (*10 Punkte*)

Diagonalisieren Sie falls möglich:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (*2 Punkte*)

b) $B = \begin{pmatrix} -19 & 3i \\ -3i & -11 \end{pmatrix}$ (*2 Punkte*)

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (*2 Punkte*)

d) (*) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*2 Punkte*)

e) (*) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Avoided Crossing/ Antikreuzung/ Anticrossing (*10 Punkte*)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zweiniveausystems beschrieben durch die Matrix $H = \begin{pmatrix} B & \Delta^* \\ \Delta & -B \end{pmatrix}$, mit $B \in \mathbb{R}$ und $\Delta \in \mathbb{C}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte E_j (wählen Sie $E_1 < E_2$) und normierten Eigenvektoren von H als Funktionen von B, Δ und $X \equiv [B^2 + |\Delta|^2]^{1/2}$. (*3 Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren in die Form $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-Y} \\ e^{i\phi}\sqrt{1+Y} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+Y} \\ e^{i\phi}\sqrt{1-Y} \end{pmatrix}$ gebracht werden können, wobei $e^{i\phi}$ der Phasenfaktor von $\Delta \equiv e^{i\phi}|\Delta|$ ist. Wie lautet Y als Funktion von B und X? Skizzieren Sie, als Funktion von $B/|\Delta|$ bei festem Δ, erstens E_1 und E_2, zweitens die betragsquadrierten Komponenten des Eigenvektors $\mathbf{v}_1$, und drittens die betragsquadrierten Komponenten des Eigenvektors $\mathbf{v}_2$, auf drei untereinander angeordneten Skizzen mit jeweils zwei Kurven. (*7 Punkte*)

Aufgabe 3: Entartetes Eigenwertproblem (*12 Punkte*)

Betrachten Sie folgende Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Einer der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$ der Matrix A ist $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Finden Sie alle Eigenwerte λ_j von A. (*Hinweis:* Zwei Eigenwerte sind entartet.) Bilden Sie eine aus den Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Ähnlichkeitstransformation S und ihre Inverse S^{-1}, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist. (*5 Punkte*)

b) Einer der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^4$ der Matrix B ist $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2,0)^T$. Finden Sie alle Eigenvektoren λ_j von B. (*Hinweis:* Zwei davon sind entartet.) Bilden Sie eine aus den Eigenvektoren von B bestehende Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ des $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Ähnlichkeitstransformation S und ihre Inverse S^{-1}, für die $S^{-1}BS$ diagonal ist. (*7 Punkte*)

Aufgabe 4: Spur einer Matrix (*8 Punkte*)

Die Spur einer $n \times n$-Matrix, SpA ist definiert als die Summe aller Diagonalelemente, $\mathrm{Sp}A = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Spur:

a) $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ für beliebige $n \times n$-Matrizen A und B. (*2 Punkte*)

b) (*) $\mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}(S^{-1}AS)$ für beliebige $n \times n$-Matrizen A und S, wobei S invertierbar ist. (*2 Punkte*)

c) (*) Wenn A die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ hat, gilt $\mathrm{Sp}A = \lambda_1 + ... + \lambda_n$. Nehmen Sie hierfür an, dass A diagonalisierbar ist. (*4 Punkte*)