Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 18.01.2016**

***Hinweis**: Die erste Klausur (früher Hauptklausur) findet am 21.02.17, 9:00-12:00 Uhr und die zweite Klausur (früher Nachklausur) findet am 04.04.17, 9:00-12:00 Uhr statt. Beide Klausuren sind im großen Hörsaal des Physiktowers.(C6.4)*

Beispielaufgabe 1: Taylor-Reihen

Entwickeln Sie folgende Funktionen. Sie dürfen dabei die Entwicklung bereits aus der Vorlesung bekannter Funktionen benutzen.

a) $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ um $x = 0$, bis einschließlich 4. Ordnung.

b) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ um $x = 0$, bis einschließlich 2. Ordnung.

Aufgabe 1: Taylor-Reihen (*10 Punkte*)

Entwickeln Sie folgende Funktionen. Sie dürfen dabei die Entwicklung bereits aus der Vorlesung bekannter Funktionen benutzen.

a)* $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}$ um $x = 0$ bis einschließlich 3. Ordnung. (*2 Punkte*)

b) $g(x) = \sin(\ln(x))$ um $x = 1$, bis einschließlich 2. Ordnung. (*2 Punkte*)

c) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+x)}$ um $x = 0$ bis einschließlich 3. Ordnung. (*2 Punkte*)

d)* $l(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$ um $x = 1$ bis einschließlich 3. Ordnung. (*2 Punkte*)

e) $t(x) = x^4 + x - 2$ um $x = 0$ bis die Reihe exakt der Funktion entspricht (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Unitäre und Hermitesche Matrizen

In dieser Aufgabe wollen wir uns beispielhaft mit den in der Vorlesung eingeführten unitären und hermiteschen Matrizen beschäftigen und einige der allgemeinen Eigenschaften für konkrete Beispiele nachweisen.

a)* Zeigen Sie, dass die Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ unitär ist. (*1 Punkt*)

b) Beweisen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{5i}{2\sqrt{15}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$ unitär ist indem Sie nachweisen, dass die Reihenvektoren der Matrix eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ bilden. (*2 Punkte*)

c) Weißen Sie nach, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$ hermitesch ist. (*1 Punkt*)

d) Betrachten Sie eine allgemeine 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & b_1 + b_2 i \\ c_1 + c_2 i & d_1 + d_2 i \end{pmatrix}$, wobei $\{a_i, b_i, c_i, d_i\} \in \mathbb{R}$. Durch die Bedingung der Hermitizität wird die allgemeine Form von hermiteschen 2×2 auf 4 freie Parameter anstatt 8 vermindert. Geben Sie diese allgemeine Form von hermiteschen Matrizen an. (*2 Punkte*)

e) Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass hermitesche Matrizen immer diagonalisierbar sind und zugehörige Basistransformation durch eine unitäre Matrix gegeben ist. Diagonalisieren Sie die hermitesche Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie dass die zugehörige Basistransformation U unitär ist. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Dreidimensionale Taylorentwicklung (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = cos(x+z) + zy^4$. Geben Sie die dritte (zweite (*5 Punkte*)) Ordnung der Taylorentwicklung an. Lehramtsstudenten müssen dabei nur die zweite Ordnung ausrechnen, die dritte Ordnung entspricht einer (*)-Aufgabe.

Aufgabe 4: Monomiales Potential (*10 Punkte*)

Betrachten Sie ein freies Teilchen der Masse m unter Einfluss des Potential $V(x) = |x^\alpha|$ mit $\alpha > 0$. Nutzen Sie die Energieerhaltung um die Periodendauer in Abhängigkeit von Energie und Exponent zu bestimmen.
Hinweis: Für $\alpha = 2$ ist die Periode energieunabhängig.