# Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
## Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 1

**Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch**
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

**WS 2017/2018**

# Aufgabe 1: Aufstellen von Gleichungen

Sei $N$ eine zweistellige natürliche Zahl und sei $M$ die zweistellige natürliche Zahl, die entsteht, wenn man die beiden Ziffern von $N$ vertauscht.Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $N - M$ ist gerade. (b) $N - M$ ist ungerade. (c) $N - M$ ist durch 9 teilbar.

## Lösung

(a) Es gilt $21 - 12 = 9$, also ist Aussage (a) falsch.

(b) Es gilt $31 - 13 = 18$, also ist Aussage (b) ebenfalls falsch.

(c) Da $N$ eine zweistellige natürliche Zahl ist, besitzt $N$ die Darstellung $N = a \cdot 10 + b \cdot 1$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gilt $M = b \cdot 10 + a \cdot 1$ und damit $N - M = a \cdot 10 + b \cdot 1 - (b \cdot 10 + a \cdot 1) = a \cdot 9 - b \cdot 9 = 9 \cdot (a - b)$, was also durch 9 teilbar ist.

# Aufgabe 2: Vollständige Induktion

Beweisen Sie die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:
Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe der ersten $n$ ungeraden natürlichen Zahlen gleich $n^2$.

## Lösung

<u>Induktionsanfang:</u> Für $n = 1$ gilt $1 = 1^2$.
<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Sei die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.
<u>Induktionsschritt:</u> Es ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = 2(n + 1) - 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)}_{=n^2 \text{ nach IV}} = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

womit der Induktionsschritt vollzogen ist.

## Aufgabe 3: Stetigkeit und Differentiation

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D_i \subset \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, für welche $x \in D_i$ die Funktion $f_i(x)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $f_i'(x)$. Ist $f_i'(x)$ stetig?

(a) $f_1(x) = \left|x^3\right|$

(b) $f_2(x) = \frac{\sin(\exp(x))}{\sqrt{x+1}}$

### Lösung

(a) $f_1(x) = \left|x^3\right|$ ist auf $D_1 = \mathbb{R}$ stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Für $x < 0$ gilt $f_1(x) = -x^3$ und $f_1(x)$ ist stetig differenzierbar mit $f_1'(x) = -3x^2$. Für $x > 0$ gilt $f_1(x) = x^3$ und $f_1(x)$ ist stetig differenzierbar mit $f_1'(x) = 3x^2$. Es bleibt also den Fall $x = 0$ zu prüfen. $f_1(x)$ ist in $x = 0$ stetig, da der rechts- und der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 = 0 = \lim_{x \to 0^-} -x^3 = \lim_{x \to 0^-} f_1(x)$$

mit dem Funktionswert $f_1(0) = 0$ übereinstimmen. Ferner gilt

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0} \left( \operatorname{sgn}(x) x^2 \right) = 0.$$

Somit existiert auch die Ableitung von $f_1(x)$ an der Stelle $x = 0$ mit $f_1'(0) = 0$.

(b) $f_2(x)$ ist offenbar wohledfiniert auf dem offenen Intervall $D_2 = (-1, \infty)$. Auf $D_2$ ist $f_2(x)$ stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Nach der Quotientenregel ist $f_2(x)$ differenzierbar mit

$$f_2'(x) = \frac{\cos\left(\mathrm{e}^x\right) \mathrm{e}^x \sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{x+1} = \frac{2(x+1)\cos\left(\mathrm{e}^x\right) \mathrm{e}^x - \sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$f_2'(x)$ ist offenbar stetig auf $D_2$.

## Aufgabe 4: Differentiation

Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f(x) = (x-1)(1+x)(x-2)$

(b) $f(x) = -\mathrm{e}^{(1-x^2)}$

### Lösung

(a) Es gilt $f(x) = (x-1)(1+x)(x-2) = (x^2-1)(x-2)$. Mit der Produktregel folgt $f'(x) = 2x(x-2) + (x^2-1) = 3x^2 - 4x + 1$.

(b) Nach der Kettenregel gilt $f'(x) = -\mathrm{e}^{(1-x^2)}(-2x) = 2x\mathrm{e}^{(1-x^2)}$.