Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 11

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 1: Differentialgleichungssysteme

Beispielaufgabe: Rabi-Oszillationen

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}\dot{c}_\uparrow(t) &= -\frac{\mathrm{i}\epsilon}{2}c_\uparrow(t) + \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}c_\downarrow(t)\\ \dot{c}_\downarrow(t) &= \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}c_\uparrow(t) + \frac{\mathrm{i}\epsilon}{2}c_\downarrow(t)\end{aligned}$$

(b) Wir leiten die zweite Gleichung in (a) ein weiteres Mal nach der Zeit ab und setzen nach Aufgabenstellung $\epsilon = 0$:

$$\ddot{c}_\downarrow(t) = \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}\dot{c}_\uparrow(t) + \frac{\mathrm{i}\epsilon}{2}\dot{c}_\downarrow(t) = \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}\dot{c}_\uparrow(t)$$

Nun setzen wir die erste Gleichung (a) dort ein:

$$\ddot{c}_\downarrow(t) = -\frac{\Delta^2}{4}c_\downarrow(t).$$

Diese Gleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator. Wir lösen sie mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}&c_\downarrow(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\\ \Rightarrow&\dot{c}_\downarrow(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\\ \Rightarrow&\ddot{c}_\downarrow(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \Rightarrow \omega = \frac{\Delta}{2}\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) = \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}c_\uparrow(t) \Rightarrow c_\uparrow(t) = -\mathrm{i}A\sin\left(\frac{\Delta}{2}t\right) + \mathrm{i}B\cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right).$$

Die Koeffizienten A und B ergeben sich aus der Anfangsbedingung ($A = 0$ und $B = -\mathrm{i}$). Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$\begin{pmatrix}c_\uparrow(t)\\ c_\downarrow(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right)\\ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\Delta}{2}t\right)\end{pmatrix}$$