Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 2

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 1: Partielle Integration

Lösen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration

(a) $I(z) = \int_0^z x^2 \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$ (b) $I(z) = \int_0^z \ln(x) \mathrm{d}x$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^z x^2 \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x &\overset{\mathrm{PI}}{=} \frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^z - \int_0^z x \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x \overset{\mathrm{PI}}{=} \frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^z - \frac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^z + \frac{1}{2}\int_0^z \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(z^2 - z)\mathrm{e}^{2z} + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2z} - 1\right)\end{aligned}$$

(b)

$$I(z) = \int_0^z \ln(x) \mathrm{d}x = I(z) = \int_0^z \ln(x) \cdot 1 \mathrm{d}x \overset{\mathrm{PI}}{=} z \ln(z)\Big|_0^z - \int_0^z \frac{1}{x} \cdot x \mathrm{d}x = z \ln(z) - z$$

Aufgabe 2: Partialbruchzerlegung

Lösen Sie folgende Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung (siehe Skript des Vorkurses)

$$I(z) = \int_0^z \frac{x+2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \mathrm{d}x$$

Lösung

Es gilt

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{x+2}{(x-3)(x-1)(x+1)}.$$

Für die Partialbruchzerlegung machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}f(x) := \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} &= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-2B-4C)x + (-A-3B+3C)}{(x-3)(x-1)(x+1)}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten A, B und c:

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0 \\ -2B - 4C &= 1 \\ -A - 3B + 3C &= 2.\end{aligned}$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems liefert $A = \frac{5}{8}$, $B = -\frac{3}{4}$ und $C = \frac{1}{8}$. Somit lässt sich das Integral wie folgt lösen:

$$\int_0^z \frac{x+2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \mathrm{d}x = \int_0^z \frac{\frac{5}{8}}{x-3} + \frac{-\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{x+1} \mathrm{d}x = \frac{5}{8} \ln\left|1 - \frac{1}{3}z\right| - \frac{3}{4} \ln|1-z| + \frac{1}{8} \ln|1+z|.$$

Aufgabe 3: Integration durch Substitution

Lösen Sie folgende Integrale durch Substitution.

(a) $I(z) = \int_0^z x\cos(x^2+\pi)\mathrm{d}x$

(b) $I(z) = \int_0^z \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$

Lösung

(a) Substituiere $y = x^2$, $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$, dann gilt

$$\int_0^z x\cos(x^2+\pi)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{y(0)}^{y(z)}\cos(y+\pi)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sin(y+\pi)\Big|_0^{z^2} = \frac{1}{2}\sin(z^2+\pi).$$

(b) Substituiere $y = x^{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{d}y = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$, dann gilt

$$\int_0^z \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{y(0)}^{y(z)}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\mathrm{e}^y\Big|_0^{z^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}z}-1\right).$$

Aufgabe 6: Näherungen

Nähern Sie folgende Funktionen mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung am Entwicklungspunkt 0.

$$f(x) = \tan(x)$$

Lösung

Wir benötigen die ersten drei Ableitungen des Tangens:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\tan(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\tan(x) = \frac{4\sin^2(x)+2}{\cos^4(x)}.$$

Die Taylorentwicklung des Tangens bis zur dritten Ordnung lautet also

$$\tan(x) = \frac{1}{0!}\tan(0) + \frac{1}{1!}\frac{1}{\cos^2(0)}x + \frac{1}{2!}\frac{2\sin(0)}{\cos^3(0)}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{4\sin^2(0)+2}{\cos^4(0)}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right).$$

Aufgabe 7: Additionstheoreme

Leiten Sie die folgenden Additionstheoreme über die komplexe Exponentialfunktion her.

$$\tfrac{1}{2}\left(\cos(a)+\cos(b)\right) = \cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$

Lösung

Mit $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$ und $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\cos(a)+\cos(b)\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{a-b}{2}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{a-b}{2}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{a-b}{2}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{a+b}{2}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{a-b}{2}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)\right)\\
&= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$