Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 1: Vektorräume

Es sei $\mathbb{C}[z]$ die Menge aller Polynome in der Unbekannten z über dem Körper $\mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}[z]$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

(ii) Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

(iii) Geben Sie einen siebendimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{C}[z]$ an. Geben Sie weiter eine geeignete Basis dieses Untervektorraumes an.

Lösung

(i) Um zu zeigen, dass $\mathbb{C}[z]$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, sind die Vektorraumaxiome zu prüfen. Die arithmetischen Gesetze wie zum Beispiel die beiden Distributivgesetze oder dass Assoziativgesetz der Addition werden direkt von den entsprechenden Gesetzen der komplexen Zahlen geerbt. Damit ist gemeint, dass zum Beispiel für Polynome $p[z], q[z] \in \mathbb{C}[z]$ offensichtlich $p[z] + q[z] = q[z] + p[z]$ (Kommutativität) gilt, da die Rechenregeln identisch zu denen aus $\mathbb{C}$ sind.
Was zu zeigen bleibt ist die Abgeschlossenheit. Das heißt, es ist zu zeigen, dass durch die Addition zweier Polynome und durch skalare Multiplikation die Menge $\mathbb{C}[z]$ nicht verlassen wird. Seien dazu $p[z], q[z] \in \mathbb{C}[z]$. Dann haben $p[z]$ und $q[z]$ die Darstellungen

$$p[z] = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k \text{ und } q[z] = \sum_{k=0}^{n} q_k z^k,$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$ und die Koeffizienten $p_k, q_k \in \mathbb{C}$ sind. Entsprechend gilt für die Summe

$$p[z] + q[z] = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k + \sum_{k=0}^{n} q_k z^k = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (p_k + q_k) z^k.$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen ist hierbei zu beachten, dass gegebenfalls fehlende Koeffizienten gleich 0 gesetzt werden müssen. Somit ist die Summe $s[z] := p[z] + q[z]$ auch ein Polynom und somit $s[z] \in \mathbb{C}[z]$. Ebenso ergibt die skalare Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{C}$ erneut ein Polynom, da

$$\lambda p[z] = \lambda \sum_{k=0}^{m} p_k z^k = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\lambda p_k}_{=:m_k} z^k = \sum_{k=0}^{m} m_k z^k =: m[z] \in \mathbb{C}[z].$$

Somit ist $\mathbb{C}[z]$ unter Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen, außerdem sind die Vektorraumaxiome erfüllt. Damit ist $\mathbb{C}[z]$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(ii) Die Vektorraudimension von $\mathbb{C}[z]$ ist unendlich. Denn wäre die Dimension endlich, dann exisierte eine maximale natürliche Zahl M, sodass sich jedes Polynom $p[z] \in \mathbb{C}[z]$ darstellen ließe als

$$p[z] = \sum_{k=0}^{M} p_k z^k,$$

wobei einige der p_k Null sein können. Allerdings ist offenbar auch

$$P[z] := \sum_{k=0}^{M+1} P_k z^k \in \mathbb{C}[z]$$

auch wenn $P_{M+1} \neq 0$, was ein Widerspruch zur Maximalität von M darstellt.

(iii) Ein siebendimensionaler Unterraum von $\mathbb{C}[z]$, wir nennen ihn hier $\mathbb{C}_7[z]$, ist gegeben durch Polynome der Form

$$p[z] = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + p_6 z^6$$

(Man beachte, dass dies nicht die einzige Wahlmöglichkeit ist), denn

- $\mathbb{C}_7[z] \subset \mathbb{C}[z]$.
- $\mathbb{C}_7[z]$ ist selbst ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (wird im Folgenden gezeigt).

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathbb{C}_7[z]$ selbst ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Dazu genügt es, die Abgeschlossenheit zu prüfen, da $\mathbb{C}_7[z] \subset \mathbb{C}[z]$. Seien also $p[z], q[z] \in \mathbb{C}_7[z]$ gegeben, dann gilt für $r[z] := p[z] + q[z]$

$$\begin{aligned} r[z] &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + p_6 z^6 + q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + q_4 z^4 + q_5 z^5 + q_6 z^6 \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) z + (p_2 + q_2) z^2 + (p_3 + q_3) z^3 + (p_4 + q_4) z^4 + (p_5 + q_5) z^5 + (p_6 + q_6) z^6 \\ &=: r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + r_4 z^4 + r_5 z^5 + r_6 z^6 \in \mathbb{C}_7[z]. \end{aligned}$$

Ebenso sieht man leicht, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p[z] \in \mathbb{C}_7[z]$ die Beziehung $\lambda p[z] \in \mathbb{C}_7[z]$ gilt, also ist die Abgeschlossenheit gezeigt. Eine geeignete Basis von $\mathbb{C}_7[z]$ ist gegeben durch die Menge der Monome $\{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6\}$ (diese ist offenbar linear unabhängig und spannt $\mathbb{C}_7[z]$ auf).

Aufgabe 3: Vektoridentitäten

Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Nutzen Sie die in der vorherigen Aufgabe gezeigte Beziehung um folgende Identität zu zeigen:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1}$$

Lösung

Auch ohne obige Beziehung würde man z.B. durch bloßes Ausrechnen aller auftretenden Kreuzprodukte zum Ziel kommen - dies ist nur viel länglicher. Das Levi-Cevita-Symbol taucht meist im Zusammenhang mit dem Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ auf. Dieses lässt sich (formal) durch

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{2}$$

berechnen, wobei mit $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i$ die i-te Komponente des Kreuzproduktes gemeint ist. (Verwendet man die in der vorherigen Aufgabe gegebenen Definition des Levi-Cevita-Symbols und schreibt die Summe aus, so erhält man natürlich den gewohnten Ausdruck für das Kreuzprodukt.) Diese Formel sieht auf den ersten Blick recht unhandlich aus, und in der Tat würde man bei gegebenen Vektoren wie z.B. $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^T, \mathbf{b} = (1, 0, 0)^T$ zur Berechnung des Kreuzproduktes auch nicht auf diese zurückgreifen. Diese Aufgabe soll jedoch zeigen, dass die Formel für *formale* Berechnungen (z.B. Beweise) ohne gegebene Zahlen für die Vektoren sehr nützlich ist. (Zum Vergleich können Sie auch die zu zeigende Relation mit der üblichen Definition des Kreuzproduktes mal nachrechnen.) Nützlich dabei ist unter Anderem die in der vorherigen Aufgabe gezeigte Identität

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}. \tag{3}$$

Da Gl. (2) einen Ausdruck für die i-te Komponente des Kreuzproduktes gibt, beweisen wir die Identität (1) ebenfalls komponentenweise. Nach (2) gilt also

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i &\overset{(2)}{=} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j \, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]_k \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j \underbrace{\left(\sum_{m,n=1}^{3} \epsilon_{kmn} b_m c_n \right)}_{[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]_k} .
\end{aligned}
$$

Um Gl. (3) nutzen zu können, müssen wie die Summen so arrangieren, das eine Summe alleine über die beiden Levi-Cevita-Symbole läuft. Die Summationsvariable k taucht in beiden Symbolen auf (zwar an unterschiedlichen Stellen - aber wir schauen uns das Schritt für Schritt an), und tatsächlich lassen sich die obigen Summen wie folgt umschreiben

$$
[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \sum_{j,m,n=1}^{3} a_j b_m c_n \left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} \right) .
$$

Um (3) verwenden zu können, müssen noch die Indices umsortiert werden. Dafür nutzen wir die Definition des Levi-Cevita-Symbols aus: Das Tupel (ijk) kann durch zyklisches Vertauschen in das Tupel (kij) umgeschrieben werden, womit gilt $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ (zyklisches Vertauschen ist eine gerade Permutation). Mit Gl. (3) und etwas Umsortieren erhält man dann

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i &= \sum_{m=1}^{3} b_m \delta_{im} \sum_{j,n=1}^{3} a_j c_n \delta_{jn} - \sum_{n=1}^{3} c_n \delta_{in} \sum_{j,m=1}^{3} a_j b_m \delta_{jm} \\
&= b_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3} a_j c_j \right)}_{=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}} - c_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3} a_j b_j \right)}_{=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} \\
&= [\mathbf{b}]_i \, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - [\mathbf{c}]_i \, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) .
\end{aligned}
$$

Benutzt wurde hier noch die Eigenschaft des Kronecker-Deltas, z.B. $\sum\limits_{i,m} b_m \delta_{im} = b_i$, die aus der Definition $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, für } i = j \\ 0 & \text{, für } i \neq j \end{cases}$ folgt. In der letzten Zeile wurde zur Verdeutlichung die Komponente b_i als $[\mathbf{b}]_i$ geschrieben (analog für $\mathbf{c}$). Somit haben wir gezeigt, dass die zu zeigende Vektoridentität für die Komponente i gilt. Da diese jedoch völlig frei wählbar ist (wir haben während der ganzen Rechnung ja keine Einschränkung bezüglich der Komponente i machen müssen) gilt diese Gleichung für *alle* Komponenten. Damit haben wir die zu zeigende Identität bewiesen.