Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 4

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 2: Natürliche Parametrisierung

Gegeben sei die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))^T \in \mathbb{R}^2$ für $t \in I = [0, 2\pi]$.

(a) Bestimmen Sie ihre Bogenlänge $s(t)$.

(b) Geben Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$ an.

Lösung

(a) Die Definition der Bogenlänge $s(t)$ lautet mit dem gegebenen Intervall I

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}|(t_1)\mathrm{d}t_1.$$

Anschaulich gibt diese die Länge der betrachteten Kurve vom Intervallanfang (hier $t = 0$) bis zum Parameter t an. Offensichtlich besteht die Berechnung aus den folgenden Schritten:

1) Berechnung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$,
2) dessen Betrag/Länge $|\dot{\mathbf{r}}|$,
3) und davon anschließend das Integral.

Schritt 1): Hier muss die gegebene Kurve $\mathbf{r}(t)$ einfach nach dem Kurvenparameter abgeleitet werden. In diesem Fall erhält man also für den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))^T$.
Schritt 2): Die Länge von $\dot{\mathbf{r}}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}| &= \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2(1-\cos(t))} = \sqrt{4\sin^2(t/2)} \\ &= 2\left|\sin(t/2)\right|. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde die Identität $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$ benutzt (diese ist übrigens sehr hilfreich fürs Integrieren). Die Betragsstriche in der dritten Zeile sind sehr wichtig im Allgemeinen und auch nötig, da die Wurzel stets eine nicht-negative Zahl liefert, der sin jedoch durchaus negativ werden kann. All das wurde benutzt, um in
Schritt 3) das Integral

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}|(t_1)\mathrm{d}t_1 = \int_0^t 2\left|\sin(t_1/2)\right|\mathrm{d}t_1$$

besser (oder überhaupt erst?) berechnen zu können. Störend sind hier jetzt nur noch die Betragsstriche im Integranden. Um ein Integral der Form $\int_J |f(x)|\mathrm{d}x$ zu berechnen, wird das Integrationsintervall J (hier $[0, t]$) in Intervalle J_+ und J_- eingeteilt, auf denen die Funktion $f(x)$ (hier $\sin(t/2)$) *nur positiv* (J_+) oder *nur negativ* (J_-) ist. Das gesamte Integral ist dann die Differenz aus den Integrale über J_+ und den Integralen über J_-: $\int_J f(x)\mathrm{d}x =$

$\int_{J_+} f(x)\mathrm{d}x - \int_{J_-} f(x)\mathrm{d}x$. (Das folgt einfach daher, dass $|f(x)| = f(x)$ überall dort, wo $f(x) \geq 0$, und $|f(x)| = -f(x)$ überall dort, wo $f(x) \leq 0$.) In dieser Aufgabe haben wir $J = [0,t]$ mit $t \in I = [0, 2\pi]$. Wegen $\sin(t) \geq 0$ für $t \in [0,\pi]$ gilt jedoch auf dem gesamten Intervall $I = [0, 2\pi]$, dass $\sin(t/2) \geq 0$, sodass in diesem Fall $J_+ = [0,t]$ und $J_- = \{\}$ - effektiv können die Betragsstriche im Integranden also einfach weggelassen werden.
Wir haben also

$$s(t) = \int\limits_0^t 2\sin(t_1/2)\,\mathrm{d}t_1 = -4\left[\cos(t_1/2)\right]_{t_1=0}^{t_1=t} = 4(1-\cos(t/2)).$$

Damit haben wir die Bogenlänge berechnet.

(b) Die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$ entsteht aus der gegebenen Kurve $\mathbf{r}(t)$, indem in der Gleichung für die Bogenlänge $s(t)$ der ursprüngliche Kurvenparameter t nach der Bogenlänge s aufgelöst und anschließend in $\mathbf{r}(t)$ dadurch ersetzt wird: $\mathbf{r}_L(s) = \mathbf{r}\,(t(s))$. Der neue Bahnparameter ist also die Bogenlänge s.
Hier müssen wir also die Gleichung $s(t) = 4(1-\cos(t/2))$ invertieren: $t(s) = 2\mathrm{arccos}(1 - s/4) \equiv 2\mathrm{arccos}(\tilde{s})$ mit der Abkürzung $\tilde{s} = 1 - s/4$. Wegen der Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Funktionen stellt sich hier noch die Frage, ob dieses Ergebnis auch mit dem ursprünglichen Intervall $I = [0, 2\pi]$ kompatibel ist. Definitionsgemäß liefert der arccos Zahlen im Intervall $[0,\pi]$, sodass stets $t \in I$ nach obiger Formel. Somit lautet die natürliche Parametrisierung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_L(s) &= (2\mathrm{arccos}(\tilde{s}) - \sin[2\mathrm{arccos}(\tilde{s})], 1 - \cos[2\mathrm{arccos}(\tilde{s})])^T \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{arccos}(\tilde{s}) - 2\sin[\mathrm{arccos}(\tilde{s})]\cos[\mathrm{arccos}(\tilde{s})] \\ 1 - \cos^2[\mathrm{arccos}(\tilde{s})] + \sin^2[\mathrm{arccos}(\tilde{s})] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{arccos}(\tilde{s}) - 2\tilde{s}\sqrt{1-\tilde{s}^2} \\ 2(1-\tilde{s}^2) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Identitäten $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ (diese folgen aus den bekannten Additionstheoremen für z.B. $\sin(x+y)$ mit $y = x$) und in der dritten Zeile $\sin(\mathrm{arccos}(x)) = +\sqrt{1-\cos^2[\mathrm{arccos}(x)]} = \sqrt{1-x^2}$ verwendet wurden. (Das +-Zeichen steht hier vor der Wurzel, da der arccos Zahlen in $[0,\pi]$ liefert, der sin auf diesem Intervall aber stets nicht-negativ ist.)

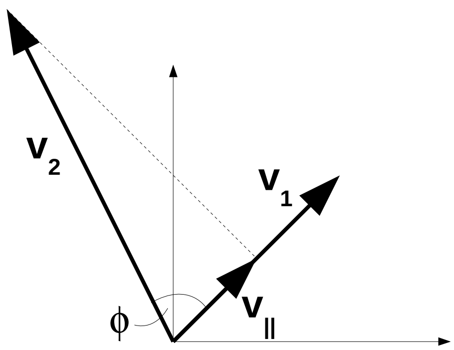
Aufgabe 4: Orthonormalisierung

Allgemeines über Orthonormalbasen

Sie haben bereits die für die Physik wahrscheinlich am wichtigsten Vektorräume kennen gelernt: den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ und den Raum der quadratintegrablen Funktionen $\mathcal{L}$. Wie Sie noch an mehreren Stellen Ihres Studiums feststellen werden, ist es für diese Vektorräume (so auch für alle anderen Vektorräume, in denen ein Skalarprodukt zwischen den Vektoren definiert werden kann) äußerst nützlich, wenn die Basis $\{e_i\}$ eine *Orthonormalbasis* (ONB) ist. (Dem können Sie aktiv nachhelfen - mehr dazu unter „Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren".) Für den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ ist dies eine Menge von n Vektoren $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, die alle paarweise senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben: Kurz soll also gelten $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, ..., n$. Dabei bezeichnet „$\cdot$" das Standardskalarprodukt (auch Euklidisches Skalarprodukt genannt) zwischen den Vektoren. Was bedeutet es jedoch für zwei Funktionen f, g „senkrecht aufeinander zu stehen" oder „die Länge 1 zu haben"? Die auf dem 3. Blatt eingeführte Abbildung $\langle f, g\rangle := \int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ (das Integral geht über ein vorgegebenes Intervall I, welches auch die komplette reelle Achse sein kann), die zwei Funktionen - also zwei *Vektoren* aus dem Vektorraum der Funktionen - eine Zahl (also ein Skalar) zuordnet, erfüllt die gleichen Eigenschaften bezüglich der darin eingesetzten Funktionen (Vektoren), wie das Standardskalarprodukt bezüglich der Vektoren aus $\mathbb{R}^n$: Linearität in beiden Argumenten, Symmetrie und positive Definitheit. Dem Wesen der Mathematik folgend verallgemeinert man also das Euklidische Skalarprodukt und nennt jede Abbildung mit diesen drei Eigenschaften ein Skalarprodukt. Die Abbildung $\langle f, g\rangle$ ist folglich ein Skalarprodukt (sogar das *Standard*skalarprodukt für den Raum der Funktionen), und erlaubt uns jetzt Formulierungen wie „senkrecht aufeinander stehen" oder „Länge 1 haben" in gleicher Weise auch auf andere Arten von Vektoren zu verallgemeinern: Zwei Vektoren e_1, e_2 (diese können jetzt auch Funktionen sein) nennt man senkrecht zueinander (oder orthogonal), falls $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ gilt, wobei mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das für diese Art von Vektoren definierte Skalarprodukt gemeint ist. (Häufig schreibt man auch für das Euklidische Skalarprodukt dieses Zeichen.) Wie verhält es sich für die „Länge eines Vektors"? Auch hier geht man zuerst vom bekannten Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ aus und verallgemeinert dies dann auch für andere Arten von Vektoren: Die Länge eines Vektors $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kann auch berechnet werden über $\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$, und folglich nennt man $\sqrt{\langle e, e\rangle}$ den Betrag bzw. die Länge für jede Art von Vektor, für die ein Skalarprodukt definiert ist (die positive Definitheit des Skalarprodukts ist unter Anderem hierfür wichtig). Eine Funktion f z.B. hat nun die Länge $\sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$. Eine Basis $\{e_i\}$ eines allgemeinen Vektorraumes heißt nun ONB (vorausgesetzt, dass ein Skalarprodukt definiert ist), falls für je zwei Basisvektoren e_i, e_j gilt $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren wird benötigt, um aus einer gegebenen Menge an linear unabhängigen Vektoren $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Menge von orthonormierten Vektoren $\{u_1, ..., u_n\}$ zu erhalten. (Was passiert, falls diese nicht linear unabhängig sind, schauen wir uns später an.) Am häufigsten kommt dieses Verfahren zur Konstruktion einer ONB zum Einsatz - und ist dabei noch nicht mal auf die Standardvektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ beschränkt.



Zur Einführung schauen wir uns hier den (sehr anschaulichen) Fall von Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ an. Der Schritt zur Verallgemeinerung auf beliebige Arten von Vektoren ist dann sehr einfach. Die Ausgangssituation ist die folgende: Gegeben haben wir zwei Vektoren, z.B. $\mathbf{v}_1 = (1,1)^T$ und $\mathbf{v}_2 = (-1,2)^T$ und wollen daraus - erst einmal nur - zwei orthogonale Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ konstruieren, die die Eigenschaft $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ erfüllen. (Wie wir die Forderung nach Normierung auf Länge 1 erfüllen können, schauen wir uns am Schluss an.) Dazu müssen wir zuallererst einen „Startvektor" festlegen: Dieser bleibt unverändert, aber alle anderen Vektoren (in diesem Beispiel ist das nur einer) werden verändert. Die Wahl dieses Startvektors ist willkürlich, das Ergebnis hängt aber von dieser Wahl ab, weshalb sie auf jeden Fall angegeben werden muss. Unser Startvektor soll $\mathbf{v}_1$ sein. Damit haben wir auch schon direkt den ersten Vektor $\mathbf{u}_1$, nämlich einfach $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,1)^T$. Wie können wir nun mit diesem und dem verbleibendem Vektor $\mathbf{v}_2$ einen zweiten Vektor konstruieren, der zu $\mathbf{u}_1$ senkrecht steht? Die Idee ist *immer* (also nicht nur für $\mathbb{R}^n$, sondern auch für beliebige Vektorräume mit definiertem Skalarprodukt) die gleiche - siehe dazu die Abbildung: Am Vektor $\mathbf{v}_2$ stört uns die Komponente $\mathbf{v}_{||}$, die *parallel* zum Vektor $\mathbf{u}_1$ steht. Wenn wir diese also entfernen, sollten wir einen Vektor erhalten, der senkrecht auf $\mathbf{u}_1$ steht. Wie können wir die Projektion $\mathbf{v}_{||}$ von $\mathbf{v}_2$ auf $\mathbf{u}_1$ berechnen? Dazu brauchen wir lediglich die *Länge* der Projektion und deren *Richtung*. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die Länge gegeben ist durch $|\mathbf{v}_2|\cos(\phi) = |\mathbf{v}_2|\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1}{|\mathbf{v}_2||\mathbf{u}_1|} = \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}$. Die Richtung der Projektion ist einfach durch die Richtung vom Vektor $\mathbf{u}_1$ gegeben - nach Konstruktion ist die Projektion $\mathbf{v}_{||}$ ja parallel zu $\mathbf{u}_1$. Insgesamt haben wir also

$$\mathbf{v}_{||} = \underbrace{\frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{u}_1|}}_{\text{Länge}} \underbrace{\frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}}_{\text{Richtung}} .$$

(Der Richtungsvektor $\mathbf{u}_1/|\mathbf{u}_1|$ ist deshalb als Einheitsvektor konstruiert, da wir die Länge der Projektion ja bereits berechnet haben.) Diese Projektion müssen wir aus dem Vektor $\mathbf{v}_2$ entfernen. Als Kandidat für den zweiten Vektor $\mathbf{u}_2$, der senkrecht auf $\mathbf{u}_1$ stehen soll, kommt also in Frage

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{||} = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1. \tag{1}$$

Machen wir nun den Test, ob dieser Vektor tatsächlich auf dem Vektor $\mathbf{u}_1$ senkrecht steht. Dazu brauchen wir nur deren Skalarprdukt zu berechnen. Für dieses gilt

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{u}_1|^2}\underbrace{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)}_{=|\mathbf{u}_1|^2} = 0.$$

Und tatsächlich haben wir mit dem über Gl. (1) berechneten Vektor $\mathbf{u}_2$ einen zum Vektor $\mathbf{u}_1$ senkrechten Vektor konstruiert.
Wie würde das Vorgehen aussehen, wenn wir z.B. Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben hätten? Wieder müssen wir zuerst einen Startvektor festlegen, z.B. $\mathbf{v}_1$. Da obige Rechnung völlig unabhängig davon war, ob wir neben $\mathbf{v}_2$ noch einen weiteren Vektor $\mathbf{v}_3$ gegeben haben, oder ob die Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ oder einem sonstigen Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ stammen, ist der über Gl.(1) berechnete Vektor $\mathbf{u}_2$ immer noch senkrecht zu $\mathbf{u}_1$. Damit haben wir bereits zwei orthogonale Vektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ gefunden. Aus $\mathbf{v}_3$ können wir nun auf analoge weise einen weiteren Vektor $\mathbf{u}_3$ konstruieren, der senkrecht auf beiden der *bereits vorhandenen* Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ steht: Wir entfernen aus $\mathbf{v}_3$ sowohl die Komponente, die parallel zu $\mathbf{u}_1$ steht, als auch die Komponente, die parallel zu $\mathbf{u}_2$ steht, und erhalten so einen Vektor $\mathbf{u}_3$, der senkrecht auf $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ steht. Damit haben wir drei Vektoren konstruiert, die alle senkrecht untereinander stehen, und diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{u}_2|^2}\mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

Damit ist ersichtlich, wie sich dieses Verfahren auf Vektoren $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\} \in \mathbb{R}^n$ verallgemeinert: Für jeden Vektor $\mathbf{v}_j$ (abgesehen vom Startvektor $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$) müssen wir die Komponente von $\mathbf{v}_j$, die parallel zu den *bereits berechneten* Vektoren $\mathbf{u}_i$ ist, entfernen. Mit der Konvention, dass die *leere Summe* $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ (die Summationsvariable k kann also nicht rückwärts laufen), können wir kompakt schreiben

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_j)}{|\mathbf{u}_k|^2}\mathbf{u}_k \qquad \text{für } j = 1, ..., n. \tag{2}$$

Dieses Verfahren wird Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren genannt. Wie können wir nun die Forderung nach Normierung auf Länge 1 erfüllen? Dies geht zum Glück ohne wenig Aufwand: Hat man orthogonale Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, so kann man diese beliebig umskalieren, und die neuen Vektoren sind immer noch orthogonal. Das bedeutet, dass wir zum Schluss jeden der Vektoren $\mathbf{u}_i$ durch seine Länge teilen, also ersetzen $\mathbf{u}_i \to \mathbf{u}_i/|\mathbf{u}_i|$. Mit den über Gl. (2) und anschließendem Umskalieren $\mathbf{u}_i \to \mathbf{u}_i/|\mathbf{u}_i|$ berechneten Vektoren haben wir nun eine Menge $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ konstruiert, die orthonormiert ist.

Verallgemeinerung auf allgemeine Vektorräume

Dieses Verfahren ist nicht auf den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ beschränkt. Hier betrachten wir nun also einen allgemeinen Vektorraum (z.B. den Vektorraum $\mathcal{L}$), auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zwischen den Vektoren definiert ist. Ersetzt man in Gl. (2) das Euklidische Skalarprodukt „$\cdot$ “ durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und setzt für die „Länge “ eines Vektors $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, so erhält man das allgemeine Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

$$\begin{aligned} v_j &= u_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle u_k, v_j \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \\ v_j &\to \frac{v_j}{\sqrt{\langle v_j, v_j \rangle}}. \end{aligned}$$

Beispielaufgabe

Bestimmen Sie die Dimension des Spanns der Menge $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ mit $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^T, \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T, \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T$ und finden Sie mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, deren erster Basisvektor parallel zu $\mathbf{v}_1$ liegt.

Lösung

Wir haben uns noch nicht der Frage zugewandt was passiert, wenn die Menge an Vektoren nicht linear unabhängig ist. Aus der Grundidee, die hinter dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren liegt, wird jedoch klar, dass jeder Vektor $\mathbf{v}_j$, der linear abhängig ist von den bereits berechneten Vektoren $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{j-1}$ den Nullvektor liefert, und dieser Vektor trägt nichts Neues zum Spann der Menge bei. Die Dimension des Spanns ist also ist also einfach durch die Zahl an Vektoren $\mathbf{u} \neq 0$ gegeben. Deshalb führen wir zuerst das Orthonormalisierungsverfahren durch und wenden uns dann der Dimension zu.
Nach Aufgabenstellung ist der Startvektor durch $\mathbf{v}_1$ gegeben, also gilt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^T$. Jetzt müssen wir nur noch in Gl. (2) einsetzen, um nacheinander die zwei verbleibenden Vektoren zu bestimmen. Die Gleichung für $\mathbf{u}_2$ lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der zweite Vektor ist also einfach durch $\mathbf{v}_2$ gegeben, da $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ bereits orthogonal waren. Nach Gl. (2) ist der dritte Vektor gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{u}_2|^2}\mathbf{u}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit der Orthogonalisierung sind wir jetzt fertig. Da alle drei Vektoren $\mathbf{u} \neq 0$, ist die Dimension des Spann 3. (Bei der Menge $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ handelt es sich also um eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.) Jetzt müssen wir die Vektoren noch normieren. Dies geht jedoch schnell, wir müssen lediglich zu jedem Vektor $\mathbf{u}$ seine Länge berechnen, ihn dadurch teilen, und dieser neue Vektor wird dann den alten Vektor ersetzen, $\mathbf{u} \to \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$. Für die Längen finden wir $|\mathbf{u}_1| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$ und analog für die anderen beiden $|\mathbf{u}_2| = \sqrt{3}, |\mathbf{u}_3| = \sqrt{2}$. Also sind die gesuchten Vektoren gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T
\end{aligned}$$

Es empfiehlt sich zuerst die Orthogonalisierung und anschließend die Normierung zu machen, da man ansonsten unter Umstände unnötig Ausdrücke mit Wurzeln mitführen muss.

Aufgabe 5: Anwendungsaufgaben

Lösen Sie folgende Anwendungsaufgaben zu Vektoren.

Beispielaufgabe: Bootsfahrt

Ein Boot kann bei ruhigem Wasser mit 8 km/h auf einem See fahren. In fließendem Wasser kann es mit 8 km/h relativ zu dem strömenden Wasser fahren. Wenn die Geschwindigkeit des Wasserstromes 3 km/h beträgt, wie schnell kann das Boot einen Baum am Ufer passieren, wenn das Boot

(a) flussaufwärts

(b) flussabwärts

fährt?

Lösung

(a) Wäre das Wasser ruhend, dann würde das Boot den Baum mit 8 km/h passieren. Allerdings trägt der Strom ihn in die entgegengesetzte Richtung mit 3 km/h. Damit ist die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Baum 8-3 km/h=5 km/h.

(b) In diesem Fall trägt der Strom das Boot in dieselbe Richtung, in die das Boot fährt. Damit ist die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Baum 8+3 km/h=11 km/h.