Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 6

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 1: Laplaceoperator

In zwei Dimensionen ist der Laplaceoperator definiert durch den Ausdruck

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten (r, ϕ) die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

annimmt.

Lösung

Transformation zu Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi).$$

Die Umkehrung lautet:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wir gehen nun schrittweise vor, indem wir zunächst die erste Ableitung einer beliebigen Funktion $f(r, \phi)$ nach x bzw. y und danach die zweite Ableitung nach x bzw. y berechnen.

- Erste Ableitung nach x:
  Nach der Kettenregel folgt

  $$\frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) f.$$

  Mit

  $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \cos(\phi)$$

  und

  $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin(\phi)}{r}$$

  folgt

  $$\frac{\partial}{\partial x} f = \left(\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) f. \tag{1}$$

- <u>Erste Ableitung nach y:</u>
  Nach der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) f.$$

  Mit

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{r} = \sin(\phi)$$

  und

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos(\phi)}{r}$$

  folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \left(\sin(\phi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) f. \tag{2}$$

- <u>Zweite Ableitung nach x:</u>
  Nach Gleichung (1) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\cos(\phi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\cos(\phi) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\
&= \cos^2(\phi) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos(\phi) \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sin(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\
&= \cos^2(\phi) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial r} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\
&\quad - \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial r} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\sin^2(\phi)}{r^2} \frac{\partial f^2}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

- <u>Zweite Ableitung nach y:</u>
  Nach Gleichung (2) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f &= \left(\sin(\phi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\sin(\phi) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\
&= \sin^2(\phi) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin(\phi) \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\
&= \sin^2(\phi) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial r} - \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\
&\quad + \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial r} - \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\cos^2(\phi)}{r^2} \frac{\partial f^2}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Addiert man nun die beiden zweiten Ableitungen, so erhält man unter Ausnutzung des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f^2}{\partial \phi^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) f,$$

da sich die Mischterme gegenseitig aufheben.

Aufgabe 2: Flächen und Volumen

Beispielaufgabe

Der Rotationskörper K werde von oben durch die Ebene $z = z_{\max} > 0$ begrenzt, und von unten durch den Rotationsparaboloid P, der durch die Rotation der Parabel $z(x) = x^2$ um die z-Achse entsteht.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Körpers an.

(b) Geben Sie jeweils eine passende Parametrisierung des Volumens und der Oberfläche des Körpers an.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren und damit das Flächen- und Volumentelement d^2r und d^3r.

(d) Berechnen Sie nun den Oberflächeninhalt A und das Volumen V des Körpers.

Lösung

(a) Es empfiehlt sich immer eine Skizze anzufertigen, nicht zuletzt um sicherzugehen, dass man auch z.B. an alle Flächenstücke des betreffenden Körpers gedacht hat. In einigen Fällen erleichtert dies auch das Finden der Noralenvektoren durch geometrische Argumente, ohne eine längliche Rechnung aufstellen zu müssen. (Wie man diese zu einer *gegebenen* Parametrisierung findet, sehen wir später.)
In Abb. a ist die Mantelfläche des Rotationskörpers K gezeichnet (die begrenzende Fläche bei $z = z_{\max}$ ist nicht eingezeichnet.)

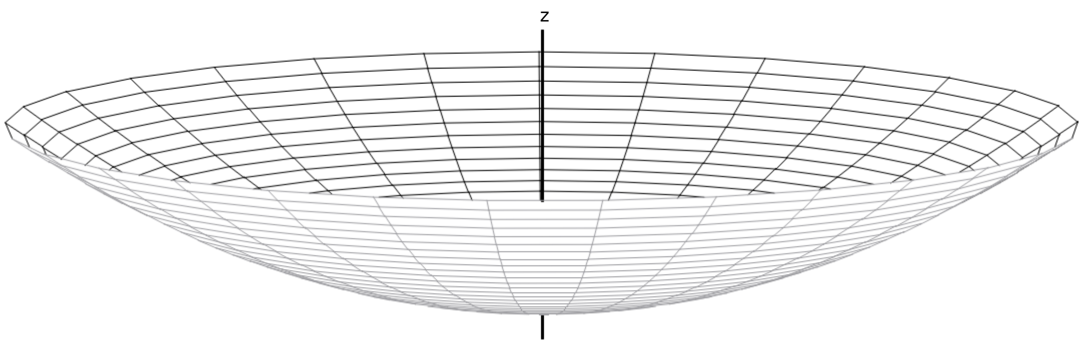

Abbildung 1: Zeichnung des Rotationskörpers K. Die begrenzende Fläche bei $z = z_{\max}$ ist nicht eingezeichnet.

(b) Da K ein Rotationskörper ist und somit eine Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse besitzt, ist eine passende Parametrisierung für sein Volumen bzw. seine Oberfläche durch Zylinderkoordinaten gegeben mit $x = \rho\cos(\phi), y = \rho\sin(\phi), z$, wobei ρ den Abstand vom Punkt (x, y, z) zur z-Achse angibt. Wir parametrisieren erst die Oberfläche und schauen uns danach die Parametrisierung für das Volumen an. Aus der Zeichnung wird jedoch ersichtlich, dass es für ein gegebenes z genau ein ρ gibt, sodass der Punkt mit Koordinaten rho und z auf der Oberfläche liegt, und dieses ρ ist gegeben durch $\rho(z) = \sqrt{z}$. Die Oberfläche wird demnach parametrisiert durch $\mathbf{r}_O(\phi, z) = \left(\sqrt{z}\cos(\phi), \sqrt{z}\sin(\phi), z\right)^T$. Aber wichtig: Zu einer Parametrisierung gehört *immer* auch die Angabe der Intervalle, aus denen die Koordinaten sind. Da es sich hier um einen Rotationskörper handelt, der eine vollständige Umdrehung um die Rotationsachse macht, kann der Winkel ϕ alle Werte aus dem Intervall $[0, 2\pi]$ annehmen. (Streng genommen ist das nicht ganz richtig: Eine Parametrisierung muss eindeutig sein, was bedeutet dass es zu jedem Punkt auf der Fläche/dem Körper *genau ein* Koordinatentupel geben muss. Bei festem z jedoch landet man mit $\phi = 0$ auf dem selben Punkt wie mit $\phi = 2\pi$ – man hat nur eine zusätzliche Umdrehung gemacht. Solche Mehrdeutigkeiten müssen streng genommen ausgeschlossen werden – hier müsste entweder $\phi = 0$ oder $\phi = 2\pi$ aus dem Intervall ausgeschlossen werden –, sind aber zur Berechnung von Längen, Flächen, Volumen etc. belanglos.) Für die Koordinate z gilt $0 \le z \le z_{\max}$. Somit lautet die Parametrisierung der Oberfläche

$$\mathbf{r}_O(\phi, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{z}\cos(\phi) \\ \sqrt{z}\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \le z \le z_{\max}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

Wie kommen wir damit auf die Parametrisierung des Volumens? – wir lassen die Bedingung $\rho = \sqrt{z}$ einfach fallen, und fordern stattdessen $\rho(z) \le \sqrt{z}$. Anschaulich bedeutet dies, das wir uns von Punkten der Oberfläche auch zu Punkten mit einem kleineren Abstand ρ, also in das Volumen hinein bewegen können. Dieses wird also parametrisiert durch

$$\mathbf{r}_V(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\phi) \\ \rho\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \le z \le z_{\max}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{z}.$$

(c) Die Richtungsvektoren $\hat{e}_i$ (trotz des verwendeten Symbols sind diese i.A. keine Einheitsvektoren oder orthogonal untereinander!) erhält man einfach durch Ableiten der Parametrisierung nach der entsprechenden Koordinate x_i. (x_i steht hier nicht für eine kartesische Koordinate, sondern für eine Koordinate, die in der Parametrierung auftaucht.) Betrachten wir wieder zuerst die Oberfläche. Zuerst wählen wir für diese aber eine andere Parametrisierung, da die obige nur aus Anschauungsgründen gewählt wurde. Wir können nämlich auch einfach ρ als unabhängige Koordinate wählen, indem wir einfach die Gleichung $\rho(z) = \sqrt{z}$ nach z umstellen und alle in $\mathbf{r}_O$ auftretenden z's dadurch ersetzen. Das ergibt dann die alternative Parametrisierung

$$\mathbf{r}_O(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\phi) \\ \rho\sin(\phi) \\ \rho^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{z_{\max}}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

Für die Richtungsvektoren gilt dann

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &:= \frac{\partial \mathbf{r}_O}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ \rho \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\phi &:= \frac{\partial \mathbf{r}_O}{\partial \phi} = \rho \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Und keiner dieser Richtungsvektoren ist normiert.) Das infinitesimale Flächenelement, welches bei der Inetgration auftaucht, ist mit diesen gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 r = |\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi| \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \; &= \rho \left| \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ \rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \\ &= \sqrt{1+\rho^2}\rho \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, . \end{aligned}$$

(Aufgrund des Betrags kann beim Kreuzprodukt die Reihenfolge der Vektoren natürlich vertauscht werden.) Für die Richtungsvektoren des Volumens erhält man

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &:= \frac{\partial \mathbf{r}_V}{\partial \rho} = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0)^T \\ \hat{e}_\phi &:= \frac{\partial \mathbf{r}_V}{\partial \phi} = \rho(-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)^T \\ \hat{e}_z &:= \frac{\partial \mathbf{r}_V}{\partial z} = (0, 0, 1)^T, \end{aligned}$$

und das infinitesimale Volumenelement ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3 r &= |\hat{e}_\rho \cdot (\hat{e}_\phi \times \hat{e}_z)| \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \, . \\ &= \rho \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \, . \end{aligned}$$

(Auch hier kann man die Vektoren beliebig untereinander austauschen.)

(d) Der Oberflächeninhalt A erhält man, indem man alle infinitesimalen Flächenelemente aufintegriert:

$$A = \int\limits_{\partial K} \mathrm{d}^2 r = \int\limits_0^{\sqrt{z_{\max}}} \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\rho^2}\rho \mathrm{d}\rho \ \mathrm{d}\phi \ = \pi \left[\frac{2}{3}\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z_{\max}}} = \frac{2}{3}\left[\left(1+z_{\max}^2\right)^{3/2} - 1\right].$$

Die Integrationsgrenzen übernimmt man dabei von den Intervallen bei der Parametrisierung. (Die Integration über ϕ ergibt einfach 2π, da der Integrand nicht von ϕ abhängt (also eine Konstante bzgl. ϕ ist). Der verbleibende Integrand ist von der Form $f(g(x))g'(x)$ mit der inneren Funktion $g = 1+\rho^2$ und der äußeren Funktion $f(x) = x^{1/2}$ und hat deshalb die Stammfunktion $F(g(x))$, wobei $F(x) = 2/3x^{3/2}$ die Stammfunktion der äußeren Funktion ist.)
Das Volumen bestimmt man auf analoge Weise:

$$V = \int\limits_K \mathrm{d}^3 r = \int\limits_0^{z_{\max}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{z}} \rho \mathrm{d}\rho \ \mathrm{d}\phi \ \mathrm{d}z \ = 2\pi \int\limits_0^{z_{\max}} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z}} \mathrm{d}z \ = \frac{\pi}{2} z_{\max}^2.$$

Auch hier übernimmt man die Integrationsgrenzen von der Parametrisierung, nur ist dieses Mal auf eine Besonderheit zu achten: Da die Intervallgrenze von ρ von der Koordinate z abhängt, muss die Integration über ρ *vor* der Integration über z ausgeführt werden (da ϕ völlig unabhängig ist, ist es wie bei der Oberfläche egal, wann man diese Integration ausführt).

Abschließende Bemerkung

Dies sind die allgemeinen Schritte, die man machen muss, um für eine beliebige Parametrisierung die Flächen- und Volumenelemente zu erhalten, die bei den entsprechenden Integralen auftauchen. Es lohnt sich allerdings die entsprechenden Ausdrücke für die sehr häufig auftretenden Zylinder- und Kugelkoordinaten auswendig zu lernen, wie z.B. $\mathrm{d}^3 r = \rho \mathrm{d}rho \ \mathrm{d}\phi \ \mathrm{d}z$.