Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 7

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 1: Matrizenmultiplikation

Betrachten Sie die folgenden Matrizen. Entscheiden Sie, zwischen welchen von diesen Matrizenprodukte definiert sind und berechnen Sie diese.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 19 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 42 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Ein Matrizenprodukt $M_1 \cdot M_2$ zweier Matrizen M_1 und M_2 ist genau dann definiert, wenn die Zahl der Spalten von M_1 gleich der Zahl der Zeilen von M_2 ist. Daher sind hier die Kombinationen $B_1 B_3$, $B_2 B_3$, $B_3 B_2$ und $B_2 B_1$ nicht möglich. Ansonsten gelten

$$\begin{aligned} B_1 B_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 19 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 42 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 19 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 42 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 19 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 42 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 9 & 113 \\ 6 & 10 & 126 \end{pmatrix} \\ B_3 B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Matrixdarstellung

Betrachten Sie die Räume V_3 und V_4 mit $V_n = \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \middle| f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}$, also der reellwertigen Polynome 3. und 4. Grades auf dem Intervall $[-1,1]$. Das Ableiten kann als Abbildung

$$D : V_4 \to V_3; f \mapsto f'$$

definiert werden, wobei $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung D linear ist.

Eine mögliche Basis von V_n ist offensichtlich die Menge $\mathcal{B}'_n := \{x^j | 0 \leq j \leq n\}$.

(b) Wie lautet die Matrixdarstellung $\underline{D}'$ von D, wenn für die Ausgangsmenge V_4 die Basis $\mathcal{B}'_4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ und die Zielmenge V_3 die Basis $\mathcal{B}'_3$ gewählt werden?

(c) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie für $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 7$

(i) die Ableitung $f'(x)$ direkt berechnen und anschließend deren Vektordarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}'_3$ angeben.

(ii) die Vektordarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}'_4$ angeben und damit über die Matrixdarstellung von D direkt die Vektordarstellung von $f'(x)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}'_3$ berechnen.

Lösung

(a) Die Abbildung ist linear, falls für alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle Elemente $f, g \in V_4$ gilt

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g).$$

Dazu setzt man *immer* wie folgt an: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in V_4$ gegeben. Setzte dann in die linke Seite der obigen Definition einer *linearen* Abbildung ein, betrachte also $D(\lambda f + \mu g)$, und verwende nun die Definition der Abbildung D. Diese ordnet dem Argument dessen Ableitung zu. Es gilt also die Ableitung von $\lambda f + \mu g$ zu berechnen. Diese ist $\lambda f' + \mu g'$. Verwende nun wieder die Definition der Abbildung, um das Bild (hier also $\lambda f' + \mu g'$) durch durch die Abbildung auszudrücken. In diesem Fall ist das leicht, da die Ableitung f' einfach durch $D(f)$ ausgedrückt werden kann (analog für g). Insgesamt haben wir also, dass $D(\lambda f + \mu g) = \lambda f' + \mu g' = \lambda D(f) + \mu D(g)$. Linearität einer Abbildung fordert, dass diese Gleichheit für *alle* Skalare λ, μ und *alle* Elemente f, g gilt. Da wir jedoch mit beliebigen Skalaren und Elementen gestartet sind und keine Einschränkung während der gesamten Argumentation für diese machen mussten, gilt obige Aussage auch für *alle* Skalare und Elemente, womit wir also die Linearität gezeigt haben.
Noch eine Bemerkung bezüglich der Skalare: Hätten wir auch *komplexe* λ, μ als Skalare zulassen dürfen? Da in der Menge V_4 (so auch in allen anderen V_n's) *definitionsgemäß* lediglich reellweertige Funktionen enthalten sind, wäre die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen nicht abgeschlossen, da für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in V_4$ das Produkt $\lambda f \in \mathbb{C}$ aber nicht $\in \mathbb{R}$, so wie es in der Definition gefordert wurde. Dies kann natürlich leicht behoben werden, indem die Mengen V_n auch komplexwertige Funktionen (aber immernoch Funktion einer reellen Variablen x) enthalten. Obige Argumentation läuft dann genauso ab, nur das wir auch $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ zulassen dürfen.

Im Folgenden betrachten wir als Basen für V_4 und V_3 die Mengen $\mathcal{B}'_4 := \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ und $\mathcal{B}'_3 := \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$.

(b) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, wie man zu einer gegebenen linearen Abbildung $A : V \to W$ und gewählten Basen $\{v_i\}$ und $\{w_i\}$ die zugehörige Matrixdarstellung $\underline{A}$ der linearen Abbildung erhält (die hängt aber von der Wahl der Basen ab). Dazu berechnet man einfach das Bild $A(v_i)$ jedes Basisvektors der Ausgangsmenge V (hier ist das V_4) und schreibt dieses als Linearkombination $\sum_j A_{ji} w_j$ aus den Basisvektoren der Bildmenge W (in diesem

Fall wäre das V_3). Die Koeffizienten A_{ji} haben dabei zwei Indices, da jeder Basisvektor v_i i.A. unterschiedliche Koeffizienten in der Linearkombination hat. Anschließend schreibt man die Koeffizienten, die man vom Bild des i. Basisvektor v_i erhalten hat, als i. Spalte einer Matrix (deshalb auch die Schreibweise der Koeffizienten A_{ji}).
Konkret an diesem Beispiel sieht das Ganze dann wie folgt aus:

1.) $v_1(x) = 1 \Rightarrow D(v_1) = 0 = \sum_j 0 \cdot w_j \Rightarrow D_{j1} = 0$ für $1 \leq j \leq 4$. Die erste Spalte von $\underline{D}$ ist also der Nullvektor.
2.) $v_2(x) = x \Rightarrow D(v_2) = 1 = w_1 \Rightarrow D_{j2} = \delta_{j1}$. Die zweite Spalte von $\underline{D}$ ist eine Eins gefolgt von Nullen.
3.) $v_3(x) = x^2 \Rightarrow D(v_3) = 2x = 2w_2 \Rightarrow D_{j3} = 2\delta_{j2}$. In der 3. Spalte sind alle Einträge null bis auf den 2., dieser ist zwei.
4.) usw.

In diesem Beispiel ist es vergleichsweise einfach die Koeffizienten D_{ji} in der Linearkombination vom Bild $D(v_i)$ zu erhalten, da beide Basen recht ähnlich sind: Man leitet ein Monom ab, erhält natürlich wieder ein Monom, jedoch mit einem gewissen Vorfaktor abhängig von der Potenz, und dieses Monom wiederum ist (abgesehen vom Vorfaktor) Teil der Basis des Zielraumes, sodass alle Koeffizienten verschwinden, bis auf einen, und dieser ist durch die Potenz gegeben. Kurz kann man also schreiben $D_{ji} = \delta_{j,i-1}$ für $1 \leq j \leq 4$ und $1 \leq i \leq 5$. (Das Kronecker-Delta sorgt quasi dafür, dass die Summe bei der Linearkombination der einzelnen Bilder (siehe die ersten drei Punkte oben) wegfällt und nur ein Summand übrig bleibt, nämlich der des abgeleiteten Monoms). Ausgeschrieben erhält man

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung zu Linearkombinationen

Noch eine Bemerkung zu der Linearkombination: Hier war es recht leicht die Koeffizienten in der Linearkombination zu bestimmen. Das ist allerdings nicht immer so. Falls jedoch für die Elemente aus dem Zielraum ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist (so wie das hier auch der Fall ist), kann man sich dieses Zunutze machen. Dies sieht dann wie folgt aus: Ausgangspunkt ist, dass man ein gegebenes Element w (bei der Matrixdarstellung ist dieses gegebene Element durch das Bild eines Basisvektors aus V gegeben – dieses Verfahren klappt aber stets, wenn man es mit Linearkombinationen zu tun hat) aus der Zielmenge W in der gegeben Basis $\{e_j\}$ darstellen möchte als $w \sum_j w_j e_j$, wobei die w_j's Skalare sind. Bildet man nun das Skalarprodukt auf beiden Seiten dieser Gleichung mit dem Basisvektor e_i, erhält man die Gleichung

$$\langle e_i, w \rangle = \sum_j w_j \langle e_i, e_j \rangle .$$

(Da das Skalarprodukt definitionsgemäß linear ist, kann man es in die Summe an den Koeffizienten w_j vorbeiziehen und direkt mit dem Basisvektor e_j bilden.) Nun hat man *eine* Gleichung für die Unbekannten w_j. Macht man nun das Gleiche mit einem weiteren, aber anderen Basisvektor e_m, erhält man eine *zweite* Gleichung. Dieses Spielchen macht man schließlich für alle Basisvektoren und hat damit n Gleichungen für die n Unbekannten w_j (n soll hier jetzt die Dimension von W sein), und dieses lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle & \dots & \langle e_3, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \langle e_n, e_3 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, w \rangle \\ \langle e_2, w \rangle \\ \langle e_3, w \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, w \rangle \end{pmatrix}$$

muss (nur noch) für die w_j's gelöst werden (indem die Matrix z.B. invertiert wird). Für die Koeffizienten dieser Matrix und den Vektor auf der rechten Seite müssen lediglich (mehr oder weniger viele) Skalarprodukte berechnet werden, alle aus den gegebenen Basisvektoren bzw. aus den Basisvektoren und dem gegebene Element w. Dies ist unter Umständen zwar viel Arbeit (z.B. abhängig von der Dimension von W oder dem Skalarprodukt), führt aber in jedem Fall zum Ziel, falls man keinen anderen Ausweg sieht, wie die Koeffizienten aus der Linearkombination aussehen könnten.
Jedoch wird hier ersichtlich, warum sich Orthogonalbasen lohnen: Eine Basis ist definitionsgemäß eine Orthogonalbasis, falls das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher Basisvektoren verschwindet, also $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Für die obige Matrix würde das allerdings bedeuten, dass sie bereits diagonal ist, also nur die Einträge auf der Diagonalen nicht verschwinden. Ein solches Gleichungssystem ist sehr leicht lösbar, da, wenn man das Matrixprodukt auf der linken Seite ausschreibt, in jeder Zeile i nur ein einziger Unbekannter w_i stehen bleibt, nach dem man die Gleichung einfach auflösen kann: $w_i = \langle e_i, w \rangle \,/\, \langle e_i, e_i \rangle$. (Ist die Basis sogar eine Orthonormalbasis, dann gilt $\langle e_i, e_i \rangle = 1$.)

(b) Gegeben ist $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 7$.

(i) Es gilt $f'(x) = 9x^2 + x + 1$. Für die Vektordarstellung dieser Funktion bezüglich der Basis $\mathcal{B}_3'$ schreiben wir dieses Funktion als Linearkombination von Basisvektoren aus $\mathcal{B}_3'$. Dafür müssen lediglich die in $f'(x)$ auftretenden Monome mit den verschiedenen Basisvektoren identifizieren werden (da die Basisvektoren selbst Monome sind). Es gilt also $f'(x) = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 9 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4$. Für die Vektordarstellung ordnet man nur noch die Koeffizienten aus der Linearkombination als Spaltenvektor an, es gilt also

$$f' \mapsto \mathbf{f}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Der Vektor muss vier Komponenten besitzen, da V_3 die Dimension vier hat.)

(ii) Die Funktion f als Linearkombination von Basisvektoren aus $\mathcal{B}_4'$ geschrieben lautet $f(x) = 7 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + \frac{1}{2} \cdot w_3 + 3 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5$, womit die Vektordarstellung lautet

$$f \mapsto \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von $f(x)$ (also das Bild von f unter der linearen Abbildung D) kann somit auch alternativ als Matrixprodukt berechnet werden. Mit der obigen Matrixdarstellung $\underline{D}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} f' = D(f) \mapsto & \underline{D} \cdot \mathbf{f} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}'. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse aus (i) und (ii) stimmen überein, womit die Matrixdarstellung verifiziert wurde.

Und warum das Ganze?

Über die Linearkombination können wir jedem Vektor eines n-dimensionalen Vektorraumes V (egal wie abstrakt dieser auch sein mag) einen Vektor aus $\mathbb{R}^n$ eindeutig zuordnen. Über die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $D : V \to W$ haben nun auch eine Möglichkeit gegeben, die Berechnung von $D(v)$ in den abstrakten Vektorräumen alternativ auch über gewöhnliche Matrizenmultiplikation in $\mathbb{R}^{n \times n}$ durchzuführen. Dies macht man sich z.B. in der Quantenmechanik zu Nutze.

Zusätzlich lassen sich Eigenschaften wie Invertierbarkeit der Abbildung D direkt an der Matrixdarstellung $\underline{D}$ ablesen, und die Inverse D^{-1} ist (falls vorhanden) einfach durch $\underline{D}^{-1}$ gegeben. Um mit linearen Abbildung also arbeiten zu können, reicht es demnach aus, Matrizen zu untersuchen und bearbeiten zu können!