Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Lösung Beispielaufgaben Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018

Aufgabe 1: Diagonalisierung von Matrizen

Diagonalisieren Sie folgende Matrizen

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung

B_1:
Wir finden die Eigenwerte über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
Charakteristisches Polynom:

$$\det(B_1 - \lambda\mathbb{1}) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right) - \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Eigenwerte: $0 \overset{!}{=} \det(B_1 - \lambda\mathbb{1}) \Rightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$
Eigenvektoren:

$$\mathbf{0} \overset{!}{=} (B_1 - \lambda_1\mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{0} \overset{!}{=} (B_1 - \lambda_2\mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren müssten nicht zwingend normiert werden, allerdings ist die Inverse S^{-1} dann einfach durch die transponierte Matrix S^{T} von S gegeben.

$$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$S^{-1}B_1S = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

B_2:
Wir finden die Eigenwerte über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
Charakteristisches Polynom:

$$\det(B_2 - \lambda \mathbb{1}) = \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right) = (4-\lambda)(-5-\lambda) + 18 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Eigenwerte: $0 \stackrel{!}{=} \det(B_2 - \lambda \mathbb{1}) \Rightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$
Eigenvektoren:

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (B_2 - \lambda_1 \mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (B_2 - \lambda_2 \mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren könnten auch normiert werden, dies ist hier aber nicht zwingend notwendig. Die Basiswechselmatrix S enthält die Eigenvektoren als Spalten; ihre Inverse folgt über die bekannte Invertierungsformel für 2×2-Matrizen:

$$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$S^{-1} B_2 S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$