Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 25.01.2017**

Info: Zur Klausurvorbereitung können mögliche Fragen zu Übungsaufgaben, Themen aus der Vorlesung oder Sonstigem bis zum 26.01 per Mail an den Dozenten geschickt werden. Nach Möglichkeit werden diese dann in der darauffolgenden Woche während der Vorlesung und/oder während des Tutoriums geklärt.

Aufgabe 1: Eigenmoden vierer gekoppelter Oszillatoren (*16 Punkte*)

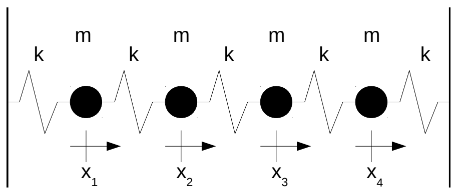

Abbildung 1: Vier Massen m, die über Federn mit Federkonstanten k miteinander gekoppelt sind.

Betrachten Sie die vier in Abb. 1 gezeigten Massen mit gleicher Masse m, die über Federn mit gleicher Federkonstante k untereinander und mit festen Wänden jeweils an den Enden verbunden sind. Die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen werden mit $x_i, i = 0, ..., 4$ bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\
\ddot{x}_2 &= \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_3 \\
\ddot{x}_3 &= \omega_0^2 x_2 - 2\omega_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_4, \\
\ddot{x}_4 &= \omega_0^2 x_3 - 2\omega_0^2 x_4
\end{aligned}$$

mit $\omega_0^2 = k/m$.

(a) Schreiben Sie obiges DGL-System in der Form

$$\ddot{\mathbf{x}} = \omega_0^2 A \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

mit einer 4×4-Matrix A und dem Vektor $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$. (*1 Punkt*)

(b) Diagonalisieren Sie die Matrix, $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$, mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, wobei $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ gelten soll. (*7,5 Punkte*)
Hinweis: Es gilt $\lambda_1 = -(5 + \sqrt{5})/2, \lambda_2 = -(3 + \sqrt{5})/2$. Die restlichen Eigenwerte können berechnet werden, indem eine entsprechende Polynomdivision mit der charakteristischen Gleichung durchgeführt wird, um eine quadratische Gleichung für λ zu erhalten.
Beachten Sie, dass A symmetrisch ist: Für geeignet gewählte Eigenvektoren ist T dann nämlich orthogonal, $T^{-1} = T^T$.

(c) Zeigen Sie, dass die Transformation $\mathbf{x} = B \cdot \mathbf{y}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & -\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

auf das entkoppelte Gleichungssystem

$$\ddot{\mathbf{y}} = \omega_0^2 D \cdot \mathbf{y} \tag{2}$$

führt. *(1,5 Punkte)*
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis ausnutzen, dass B orthogonal ist.

(d) Die obige Transformation $\mathbf{y} = B^{-1} \cdot \mathbf{x}$ gibt die sog. Eigenmoden der vier gekoppelten Oszillatoren an. Demnach ist jede Eigenmode y_i einfach eine bestimmte kollektive, mit gleicher Frequenz stattfindende Schwingung der vier Oszillatoren. Die Gl. (1) besagt, dass die Bewegungen der einzelnen Oszillatoren i.A. gekoppelt ablaufen: Die Bewegung eines Oszillators überträgt sich auch auf die anderen. Was gilt für die Eigenmoden? Betrachten Sie dazu Gl. (2). Skizzieren Sie alle Eigenmoden und geben Sie die jeweilige Frequenz an. Machen Sie sich dafür zuerst klar, welche anschauliche Bedeutung den Eigenvektoren von A zukommt. *(6 Punkte)*

Aufgabe 2: Fouriertransformation *(9 Punkte)*

Die Fouriertransformation $\tilde{f}(k)$ einer Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden Funktionen:

(a) $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$ *(3,5 Punkte)*

(b) $f(x) = f_0 \mathrm{e}^{-x/\lambda} \cos(k_s x) \Theta(x)$. *(2 Punkte)*

σ, λ, k_s sind dabei Konstanten, und $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ist die sog. Stufen- oder Heaviside-Funktion.
Verifizieren Sie anhand der in (a) gegebenen Funktion durch einfaches Nachrechnen, dass die Rücktransformation gegeben ist durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k.$$

(3,5 Punkte)
Hinweis: Schreiben Sie bei der Fouriertransformation der Gauß-Funktion den Exponenten über quadratische Ergänzung und anschließende Substitution in das bereits bekannte Integral $\int \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ um.

Aufgabe 3: Diracsche δ-Distribution *(15 Punkte)*

Die übliche, saloppe Aussage

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

ist keine sinnvolle Definition einer integrierbaren Funktion. Um die δ-Distribution sinnvoll zu definieren, benutzt man Funktionenfolgen, deren Integrale die definierenden Eigenschaften der δ-Distribution approximieren.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Funktionenfolgen die definierende Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0)$$

annähern. Nehmen Sie im zweiten Fall dazu an, dass die Ableitung der Funktion f beschränkt ist.

- $\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}, & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$ *(5 Punkte)*
- $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ *(7 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie die Mittelwertsätze der Integral- und Differentialrechnung.

(b) Zeigen Sie, dass $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ gilt. *(1 Punkt)*

(c) Zeigen Sie mit der Funktionenfolge $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, ...$, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\, \mathrm{d}x = - \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$$

eine sinnvolle Definition der Ableitung der δ-Distribution ist, falls

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) f(x) = 0$$

gilt. *(2 Punkte)*