Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 02.11.2017**

Aufgabe 1: Partielle Integration (*6 Punkte*)

Lösen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration.

Beispielaufgabe

(a) $I(z) = \int_0^z x^2 \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$

(b) $I(z) = \int_0^z \ln(x) \mathrm{d}x$

Hausaufgabe

(a) $I(z) = \int_0^z x\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(b) $I(z) = \int_0^z \ln(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(c) $I(z) = \int_0^z \sin^2(x) \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(d) $I(z) = \int_0^z \sin^4(x) \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(e) $I(z) = \int_0^z x \ln(x) \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(f) $I(z) = \int_0^z \sin(x) \cos(x) \mathrm{d}x$ (*) (*1 Punkt*)

Aufgabe 2: Partialbruchzerlegung (*4 Punkte*)

Lösen Sie folgende Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung (siehe Skript des Vorkurses).

Beispielaufgabe

(a) $I(z) = \int_0^z \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \mathrm{d}x$

Hausaufgabe

(a) $I(z) = \int_0^z \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)^2} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(b) $I(z) = \int_0^z \frac{3x+3}{(x+1)^2(x-2)} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(c) $I(z) = \int_0^z \frac{3x}{(x+1)^2(x-2)} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(d) $I(z) = \int_0^z \frac{x+1}{x^2-3x+2} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*) (*)

Aufgabe 3: Integration durch Substitution (*10 Punkte*)

Lösen Sie folgende Integrale durch Substitution.

Beispielaufgabe

(a) $I(z) = \int_0^z x \cos(x^2 + \pi) \mathrm{d}x$

(b) $I(z) = \int_0^z \sqrt{x} \mathrm{e}^{\sqrt{x^3}} \mathrm{d}x$

Hausaufgabe

(a) $I(z) = \int_0^z \frac{\sqrt{1+\ln(x+1)}}{x+1} \mathrm{d}x$ (*2 Punkte*)

(b) $I(z) = \int_0^z x^3 \mathrm{e}^{-x^4} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(c) $I(z) = \int_0^z x^2 \sqrt{x^3+1} \mathrm{d}x$ (*1 Punkt*)

(d) $I(z) = \int_0^z \sin(x) \mathrm{e}^{\cos(x)} \mathrm{d}x$ (*2 Punkte*)

(e) $I(z) = \int_0^z \frac{\sin(\sqrt{\pi x})}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ (*2 Punkte*) (*)

(f) $I(z) = \int_0^z \sin^3(x) \cos(x) \mathrm{d}x$ (*2 Punkte*) (*)

Aufgabe 4: Ungerade Funktion (*5 Punkte*)

Sei f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-z}^{z} \mathrm{d}x\ f(x) = 0$$

gilt für alle $z \in \mathbb{R}$. Was gilt im Grenzfall $z \to \infty$?
Bestimmen Sie mit dieser Beziehung den Wert der Integrale

$$\int_{-z}^{z} \mathrm{d}x\ x^{2k-1} \mathrm{e}^{-x^2}$$

mit $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: Das Gaußintegral (*8 Punkte*)

Es sei $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ die sogenannte Gaußfunktion. (Diese wird Ihnen im Studium noch sehr häufig begegnen!) Diese besitzt trotz ihrer scheinbar einfachen Gestalt keine analytisch darstellbare Stammfunktion. Dennoch lässt sich zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

gilt. Diese Beziehung dürfen Sie im Folgenden benutzen. Berechnen Sie nun die Integrale

(a)

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}$$

(*1 Punkt*)

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-ax^2} \quad \text{mit } a > 0$$

(*1 Punkt*)

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c} \quad \text{mit } a > 0 \text{ und } b, c \in \mathbb{R}$$

(*2 Punkte*)

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^{2k} \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{mit } \in \mathbb{N}$$

(*4 Punkte*) (*)

Hinweis zu (d): Was passiert, wann man e^{-ax^2} nach a ableitet?

Aufgabe 6: Näherungen *(3 Punkte)*

Nähern Sie folgende Funktionen mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung am Entwicklungspunkt 0.

Beispielaufgabe

$f(x) = \tan(x)$

Hausaufgabe

(a) $f_1(x) = \ln(1 + x)$ *(1 Punkt)*

(b) $f_2(x) = (1 + x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ *(1 Punkt)*

(c) $f_3(x) = \sqrt{1 + x^2}$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 7: Additionstheoreme *(4 Punkte)*

Leiten Sie die folgenden Additionstheoreme über die komplexe Exponentialfunktion her.

Beispielaufgabe

$\frac{1}{2}\left(\cos(a) + \cos(b)\right) = \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Hausaufgabe

(a) $\frac{1}{2}\left(\sin(x) - \sin(y)\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ *(2 Punkte)*

(b) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ *(2 Punkte)*