Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 09.11.2017**

Aufgabe 1: Vektorräume (*16 Punkte*)

Beispielaufgabe

Es sei $\mathbb{C}[z]$ die Menge aller Polynome in der Unbekannten z über dem Körper $\mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}[z]$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

(ii) Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

(iii) Geben Sie einen siebendimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{C}[z]$ an. Geben Sie weiter eine geeignete Basis dieses Untervektorraumes an.

Hausaufgabe

(a) Wir nennen eine reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, falls

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$$

gilt.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge aller reellwertigen Nullfolgen bezüglich der gliedweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. (*3 Punkte*)

(ii) Welche Dimension hat dieser Vektorraum? (*1 Punkt*)

(iii) Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an. (*3 Punkte*)

(iv) (*) Ist es möglich das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^k$ auf den Vektorraum der reellwertigen Folgen durch

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle = \sum_{n=1}^{k} v_n^{(1)} v_n^{(2)} \to \langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

zu übertragen? (*1 Punkt*)

(b) Sei $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ die Menge aller quadratintegrablen Funktionen über $\mathbb{R}$, das heißt

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) := \left\{ f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

(i) (*) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. (*3 Punkte*)
(*Hinweis:* Es gilt die Dreieicksungleichung $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.)

(ii) (*) Zeigen Sie, dass für $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ die Abbildung

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt darstellt. (*3 Punkte*)

(iii) Geben Sie, neben der Nullfunktion $f(x) = 0$, zwei weitere Beispiele für Elemente von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ an und berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen diesen. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Levi-Cevita-Symbol (*6 Punkte*)

Das Levi-Cevita-Symbol ϵ_{ijk} mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ist gegeben durch

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} \text{1, falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation des Tupels } (1,2,3) \text{ ist.} \\ \text{-1, falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation des Tupels } (1,2,3) \text{ ist.} \\ \text{0, wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Zeigen Sie die nützliche Beziehung

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \tag{1}$$

Aufgabe 3: Vektoridentitäten (*6 Punkte*)

Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Nutzen Sie die Beziehung (1) um folgende Identitäten zu zeigen:

Beispielaufgabe

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Hausaufgabe

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (*2 Punkte*)

(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ (*2 Punkte*)

(c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Integration - Verschiedenes (*12 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{2\pi} \mathrm{d}x\ x^2 \cos(x)$

(b) $\displaystyle\int_{-4}^{10} \mathrm{d}x\ x|x|\mathrm{e}^x$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos^2(x)$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{8} \mathrm{d}x\ 5^x$

(e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}x\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{17} \cot(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-(x-\frac{\pi}{2})^2}$

(f) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(*)$

(g) $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{8}} \mathrm{d}x\ \frac{\cot(x)}{\ln(\sin(x))}$

(h) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sin(x)}(*)$

(*8 × 1,5 Punkte*)