Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 5

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 23.11.2017**

Die Zwischenklausur findet am Do, den 7.12, im großen Hörsaal der Physik von 12:15 - 13:45 an Stelle der regulären Vorlesung statt. Weitere Infos werden auf der Homepage bekannt gegeben.

Aufgabe 1: Spiralbahn (*8 Punkte*)

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich reibungsfrei in einer Ebene. Sein Weg wird beschrieben durch die Formel

$$\mathbf{r}(t) = r_0 \mathrm{e}^{-ft} \begin{pmatrix} \cos(2\pi f t) \\ \sin(2\pi f t) \end{pmatrix}$$

mit $r_0 > 0$ und $f > 0$.

(a) Skizzieren Sie den Weg des Massenpunktes in der $x-y-$Ebene. (*1 Punkt*)

(b) Geben Sie $\mathbf{v}(t)$, $|\mathbf{v}(t)|$, $\mathbf{a}(t)$ und $|\mathbf{a}(t)|$ an. Berechnen Sie $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)$. (*3 Punkte*)

(c) Berechnen Sie den Weg $s(t)$, den der Massenpunkt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ zurückgelegt hat. (*4 Punkte*)

Aufgabe 2: Orthogonalisierung von Monomen (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die Menge aller reellwertigen Polynome über dem Intervall $I = [-1, 1]$, die wir im Folgenden $\mathbb{R}_{[-1,1]}[x]$ nennen. Diese wird offenbar linear von den Monomen $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ erzeugt.

(a) (*) Begründen Sie kurz, dass $\mathbb{R}_{[-1,1]}[x]$ ein reeller Vektorraum ist. (*1 Punkt*) (*)

(b) Zeigen Sie, dass für $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_{[-1,1]}[x]$ die Abbildung

$$\langle p(x), q(x) \rangle := \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_{[-1,1]}[x]$ darstellt. (*3 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der Monome keine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}_{[-1,1]}[x]$ gemäß des Skalarproduktes aus (b) ist, obwohl sie linear unabhängig ist. (*1 Punkt*)

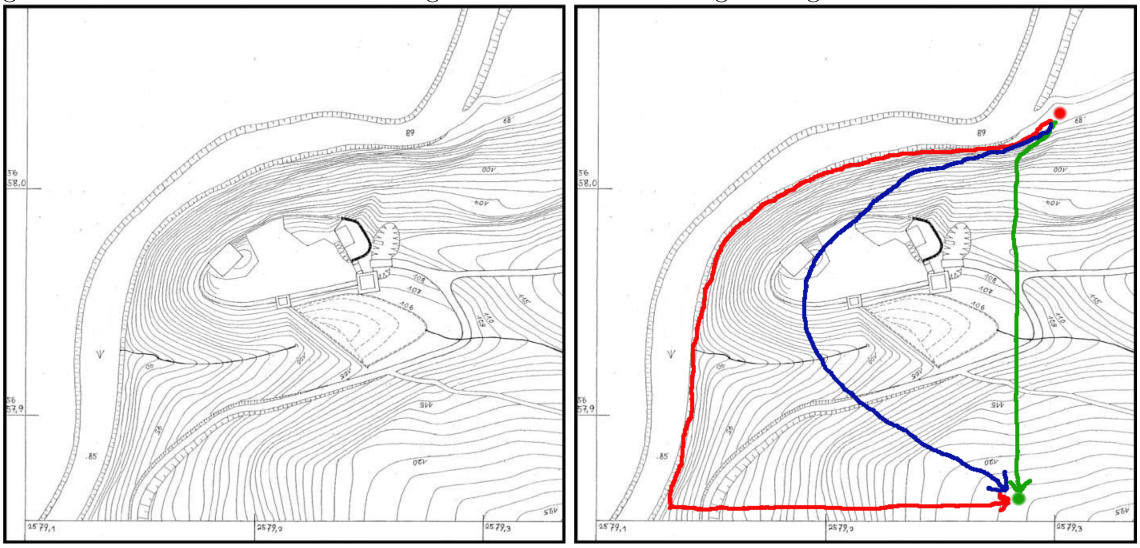
(d) (*) Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren um ausgehend von dem Polynom $P_0(x) = 1$ die ersten sechs Polynome $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}_{[-1,1]}[x]$ zu bestimmen. Beachten Sie hierbei, dass keine Normierung der Polynome gefordert ist! Stattdessen forden wir $P_i(1) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. (*5 Punkte*) (*)

Aufgabe 3: Höhenlinien *(7 Punkte)*

Höhenlinien sind Linien in der Zahlenebene (x, y), auf denen eine Funktion $f(x, y)$ konstant ist. Diese Funktion könnte zum Beispiel das Oberflächenprofil eines Gebirges ohne Überhänge beschreiben.

Beispielaufgabe: Wanderung mit Karte

Helmut ist begeisterter Wanderer. Er befindet sich an einem Flussufer (roter Punkt auf der Karte), möchte aber den Fluss mit besserer Aussicht betrachten. Dazu möchte er zu einem Aussichtspunkt (grüner Punkt auf der Karte) wandern. Er hat drei mögliche Wege zur Auswahl. Da er nicht mehr der jüngste ist, hat ihm sein Arzt empfohlen, er solle auf allzu große Steigungen verzichten. Welchen der drei Wege sollte Helmut einschlagen? Begründen Sie ihre Antwort!



Hausaufgabe

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktionen $f_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $f_2(x, y) = -x^2y^2$. Sie dürfen dabei gerne ein geeignetes Computerprogramm zu Rate ziehen. *(2 Punkte)*

(b) Berechnen Sie die Gradienten $\nabla f_1(x, y)$ und $\nabla f_2(x, y)$. *(3 Punkte)*

(c) Zeichnen Sie die Gradienten in die Skizzen mit den Höhenlinien ein! Welche Richtung hat der Gradient? *(2 Punkte)*
Hinweis: Der Gradientenvektor einer Funktion an einem bestimmten Punkt steht stets senkrecht auf der Höhenlinie der Funktion, die diesen Punkt durchläuft.

Aufgabe 4: Vertauschen partieller Ableitungen *(7 Punkte)*

(a) (*) Gegeben sei eine Funktion von zwei Veränderlichen, $f(x, y)$. Welche Bedingungen müssen an diese Funktion f gestellt werden, damit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{1}$$

gilt? (Bei der Berechnung der gemischten partiellen Ableitung soll es also keine Rolle spielen, nach welcher Variablen zuerst abgeleitet wird.) Betrachten Sie dazu die beiden Funktionen

$$f_1(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2}\sin(y) \quad \text{und} \quad f_2(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \text{ mit } f_2(0, 0) = 0,$$

und berechnen für diese die obige gemischte partielle Ableitung aus Gl. (1) und werten diese an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ aus. *(4 Punkte)* (*)

(b) Sei eine Funktion $f(x,y,z)$ mit den richten Eigenschaften gegeben, so dass also für eine beliebige gemischte partielle Ableitung die Reihenfolge der Berechnung keine Rolle spielt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ mit } i,j = 1,2,3.$$

(Die Variablen x_1, x_2, x_3 sollen hier für x, y, z stehen.) Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0.$$

(Diese Identität ist später in der Elektrostatik wichtig.) *(3 Punkte)*

Aufgabe 5: Partielle Ableitungen *(4 × 2 Punkte)*

Berechnen Sie für die Funktionen

(a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

(b) $g(x,y) = \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$

(c) $h(x,y,z) = \cos(x+z) + zy^4$

(d) $i(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

sämtliche erste und zweite partielle Ableitungen.