Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 30.11.2017**

Aufgabe 1: Laplaceoperator (*12 Punkte*)

Beispielaufgabe

In zwei Dimensionen ist der Laplaceoperator definiert durch den Ausdruck

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten (r, ϕ) die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

annimmt.

Hausaufgabe

In drei Dimensionen ist der Laplaceoperator definiert durch den Ausdruck

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) die Form

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

annimmt, indem Sie ihn ausgehend von der kartesischen Basis auf eine Funktion f wirken lassen und die auftretenden Differentialoperatoren transformieren. (*12 Punkte*)

Aufgabe 2: Flächen und Volumen (*8 Punkte*)

Beispielaufgabe

Der Rotationskörper K werde von oben durch die Ebene $z = z_{\max}$ begrenzt, und von unten durch den Rotationsparaboloid P, der durch die Rotation der Parabel $z(x) = x^2$ um die z-Achse entsteht.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Körpers an.

(b) Geben Sie jeweils eine passende Parametrisierung des Volumens und der Oberfläche des Körpers an.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren und damit das Flächen- und Volumentelement d^2r und d^3r.

(d) Berechnen Sie nun den Oberflächeninhalt A und das Volumen V des Körpers.

Hausaufgabe

Der Körper K besteht aus einer um den Ursprung zentrierten Kugel mit Radius R, wobei jedoch die Viertelkugel im ersten Oktanten mit $x, y, z > 0$ fehlt. Die Dichteverteilung ist gegeben durch $\rho(x, y, z) = \rho_0 \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/R\right)\left(2 + y/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ mit einer positiven Konstante ρ_0. Berechnen Sie

(a) seinen Oberflächeninhalt explizit, also ohne auszunutzen, dass die Kugeloberfläche $4\pi R^2$ beträgt! (*3 Punkte*)

(b) $^{(\star)}$ seine Gesamtmasse M. (*5 Punkte*)

Aufgabe 3: Satz von Stokes (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die obere Hälfte der Einheitskugel $S = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ und das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -2x \\ xy(1+z) \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie die Gültigkeit des Satzes von Stokes, indem Sie das Linienintegral $\int\limits_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

(a) direkt berechnen (*5 Punkte*)

(b) entsprechend dem Satz von Stokes in ein Flächenintegral umwandeln und dieses berechnen. (*5 Punkte*)

Aufgabe 4: Satz von Gauß – Keilring *(10 Punkte)*

Der in der Skizze 1 grau schattierte "Keilring", K, wird in Kugelkoordinaten beschrieben durch $0 \leq r \leq R$ und $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$. (Solch ein ringartiges Objekt, mit keilförmigem Innenprofil und gerundetem Außenprofil, entsteht aus einer Kugel mit Radius R durch Herausschneiden eines um die z-Achse zentrierten Doppelkegels mit Öffnungswinkel $\pi/3$.)
Verifizieren Sie anhand dieses Körpers und dieses Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r\mathbf{e}_r$ den Gaußschen Integralsatz. Berechnen Sie dazu den nach außen gerichteten Fluss Φ_K des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ durch die Oberfläche ∂K des Keilrings auf zwei verschiedene Arten:

(a) Berechnen Sie das Flussintegral $\Phi_K = \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{n} \mathrm{d}^2 r$ explizit. *(2,5 Punkte)*

(b) Drücken Sie das Flussintegral mittels des Satzes von Gauß durch ein Volumenintegral über die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{F}$ aus, und berechnen Sie dieses Volumenintegral explizit. Stimmt dieses Ergebnis mit dem aus dem vorherigen Aufgabenteil überein? *(3,5 Punkte)*
Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt für ein Vektorfeld $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\phi\mathbf{e}_\phi$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta \left(\sin(\theta)F_\theta\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi F_\phi.$$

(c) $^{(\star)}$ Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\cos(\theta)\mathbf{e}_\theta$ den nach außen gerichteten Fluss durch die Oberfläche des Keilrings, entweder direkt oder mittels dem Satz von Gauß. *(5 Punkte)*

Hinweis: Der Normalenvektor der oberen Keilfläche ist gegeben durch

$$\hat{n}_{\text{oben}} = -1/2(\cos(\phi), \sin(\phi), -\sqrt{3})^T.$$

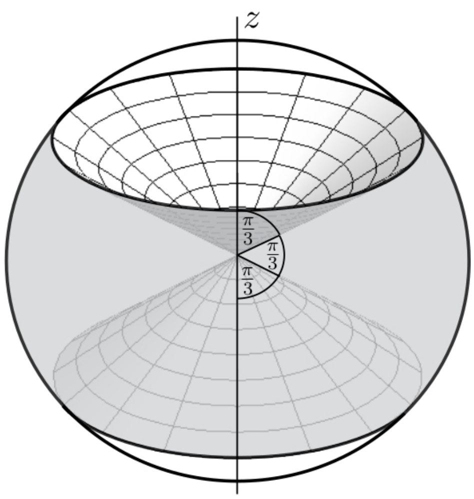

Abbildung 1: Keilring