Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 8

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 21.12.2017**

*Hinweis zu **Pflichtveranstaltung:*** Am Montag, dem 18.12, findet eine **Pflichtveranstaltung** mit **Anwesenheitspflicht** statt. Finden Sie sich dafür bitte ab 11:30 im Gebäude E2.6 Raum E0.4 ein und genießen dort vom Fachschaftsrat der Physikstudiengänge selbstgemachten Glühwein und Gebäck bei weihnachtlicher Musik.

Aufgabe 1: Matrixinversion (*10 Punkte*)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 8+a & 2+2a & 2 \\ 2+2a & 5 & -4-2a \\ 2 & -4-2a & 5-a \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie für $a = -1$ die inverse Matrix A^{-1} mittels Gauß-Algorithmus.(*Anmerkung:* Es empfiehlt sich das Auftreten von Brüchen möglichst so lange zu vermeiden, bis die linke Seite in Zeilen-Stufen-Form gebracht worden ist). Bestimmen Sie damit die Lösung zu obigem Gleichungssystem. (*3 Punkte*)

(b) Für welche Werte von a ist die Matrix A nicht invertierbar? (*2 Punkte*)

(c) $^{(\star)}$ Falls A invertierbar ist, hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, nämlich $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Falls A nicht invertierbar ist, ist die Lösung entweder nicht eindeutig, oder es existiert keine Lösung. Welcher dieser beiden Fälle auftritt, hängt von $\mathbf{b}$ ab. Entscheiden Sie dies für $\mathbf{b} = (4,1,1)^T$ und die in (b) gefundenen Werte von a und bestimmen Sie $\mathbf{x}$, falls möglich.(*5 Punkte*)

Aufgabe 2: Inversion von 3x3 Matrizen (*10 Punkte*)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

eine beliebige invertierbare 3×3 Matrix. Zeigen Sie, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie $D = D(a,b,c,d,e,f,g,h,i)$ explizit. Für nicht invertierbare Matrizen verschwindet D.

Aufgabe 3: Polynominterpolation (*12 Punkte*)

Polynome lassen sich sehr leicht integrieren und ableiten. Deswegen benutzt man sie häufig in der numerischen Mathematik unter anderem zur numerischen Integration und damit auch zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, die nicht zwangsläufig eine analytisch darstellbare Lösung besitzen. Die zu lösende Aufgabe ist folgende:
Für $n+1$ gegebende Wertepaare (x_i, y_i) mit $i \in \{0, \ldots, n\}$ wird ein Polynom P maximal n-ten Grades gesucht, das alle Gleichungen $P(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ erfüllt.
Man sagt, P *interpoliert* die Punkte (x_i, y_i). Im Folgenden wollen wir die Lösbarkeit dieser Aufgabe untersuchen.

(a) $^{(\bigstar)}$ Zunächst nehmen wir an, es gäbe ein solches Polynom P. Dieses hat dann in der Standardbasis der Polynome $\{x^k | 0 \leq k \leq n\}$ die Darstellung

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$. Begründen Sie, warum das Finden des Polynoms P gleichbedeutend ist mit dem Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}}_{=:V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(*2 Punkte*)

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix V_n. Folgern Sie aus Ihrem Ergebnis, unter welchen Bedingungen ein solches Polynom P existiert. Sind diese erfüllt, ist P dann eindeutig bestimmt? (*7 Punkte*)

(c) Gegeben seien die Wertepaare $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ und $(3, -1)$. Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem (1) auf und bestimmen Sie damit das Polynom maximal dritten Grades, das diese Punkte interpoliert. (*3 Punkte*)

Aufgabe 4$^{(\bigstar)}$: Spin-1-Matrizen (*8 Punkte*)

Zur Beschreibung quantenmechanischer Teilchen mit Spin 1 werden folgende Matrizen benutzt:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$. (*2 Punkte*)

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren $[S_x, S_y]$, $[S_y, S_z]$ und $[S_z, S_x]$ und drücken Sie das Ergebnis jeweils wieder durch eine der oben angegebenen Matrizen aus. (*6 Punkte*)
Hinweis: Der Kommutator zweier quadratischer Matrizen ist definiert durch $[A, B] = AB - BA$.