Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Peter Schuhmacher, M.Sc.
Raphael Schmit, M.Sc.

WS 2017/2018 **Abgabe 04.01.2017**

Aufgabe 1: Diagonalisierung von Matrizen (*10 Punkte*)

Diagonalisieren Sie folgende Matrizen

Beispielaufgabe

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{19}{10} & \frac{3\mathrm{i}}{10} \\ -\frac{3\mathrm{i}}{10} & -\frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} \qquad (*)M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*2×2 und 2×3 Punkte*)

Aufgabe 2: Funktionen von Matrizen (*8 Punkte*)

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und f eine Funktion, die man als Potenzreihe der Form

$$f(x) = \sum_k c_k x^k$$

darstellen kann. Wir definieren dann die Funktion f der Matrix A durch

$$f(A) := \sum_k c_k A^k.$$

Zum Beispiel ist die Exponentialfunktion einer Matrix A gegeben durch

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} = \cos(A) + \mathrm{i}\sin(A).$$

gilt. (*4 Punkte*)

(b) Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck zur Berechnung von e^A, wenn $A^\mathrm{T} = A$ gilt, indem Sie diese auf das Exponenzieren einer Diagonalmatrix zurückführen. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Entartetes Eigenwertproblem (*) (*12 Punkte*)

Betrachten Sie folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Einer der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$ der Matrix A ist $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Finden Sie alle Eigenwerte λ_j von A. (*Hinweis:* Zwei Eigenwerte sind entartet.) Bilden Sie eine aus den Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Basiswechselmatrix S und ihre Inverse S^{-1}, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist. (*5 Punkte*)

b) Einer der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^4$ der Matrix B ist $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2,0)^T$. Finden Sie alle Eigenvektoren λ_j von B. (*Hinweis:* Zwei davon sind entartet.) Bilden Sie eine aus den Eigenvektoren von B bestehende Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ des $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Basiswechselmatrix S und ihre Inverse S^{-1}, für die $S^{-1}BS$ diagonal ist. (*7 Punkte*)

Aufgabe 4: Determinantenmultiplikationssatz (*5 Punkte*)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Determinante für zwei beliebige $n \times n$-Matrizen A, B:

(a) $\det(AB) = \det(BA)$. (*1,5 Punkte*)

(b) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$ (für eine invertierbare, aber sonst beliebige Matrix B). (*1,5 Punkte*)

(c) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, wobei die λ_i's die Eigenwerte der Matrix bezeichnen. (*2 Punkte*)

Hinweis zu Teil (a): Überlegen Sie sich, wie Sie $\det(AB)$ durch $\det(A)$ und $\det(B)$ ausdrücken können.

Aufgabe 5: Spur einer Matrix (*5 Punkte*)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Spur für zwei beliebige $n \times n$-Matrizen A, B:

(a) $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$. (*2 Punkte*)

(b) $\mathrm{Sp}(B^{-1}AB) = \mathrm{Sp}(A)$ (für eine invertierbare, aber sonst beliebige Matrix B). (*1 Punkt*)

(c) $\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, wobei die λ_i's die Eigenwerte der Matrix bezeichnen. (*2 Punkte*)

Weihnachtsaufgaben: (*10 Bonuspunkte*)

(a) Vor Weihnachten kauft sich jede Familie in Engelsheim einen Weihnachtsbaum. Es werden Tannen, Fichten und Kiefern angeboten. Es ist bekannt, dass von allen Familien, die in einem Jahr eine Tanne gekauft haben, 10% im folgenden Jahr eine Fichte und 10% eine Kiefer kaufen. Von den Fichtenkäufern steigen 40% auf Tannen und 10% auf Kiefern um. Von den Kiefernkäufern wiederum kaufen sich im folgenden Jahr 20% eine Fichte und 20% eine Tanne.
Wie viel Prozent aller Familien müssen Tannenkäufer, Fichtenkäufer und Kieferkäufer sein, damit sich die Verteilung von einem Jahr zum nächsten nicht ändert? (*4 Punkte*)

(b) Der Weihnachtsmann hat fünf Geschenkpakete auf seinen Schlitten gestapelt. Nach rasanter Fahrt haben sich die Pakete wie in der Abbildung nach hinten verschoben und sind beinahe vom Schlitten gekippt. Es scheint, als ob sich das oberste Geschenk sogar nicht einmal mehr über der Ladefläche befindet. Der Weihnachtsmann fragt sich, ob das tatsächlich zutreffen kann. Außerdem grübelt er, wie weit er wohl nach hinten bauen könnte, wenn er beliebig viele Geschenke zur Verfügung hätte. Können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen? (*6 Punkte*)
Hinweis: Wir nehmen natürlich an, dass alle Pakete gleichartige, homogene, gleich ausgerichtete Quader sind und sich nur in Längsrichtung verschieben. Überlegen Sie sich, wie weit das oberste Paket über das zweitoberste hinausragen darf, wie weit die beiden obersten Pakete über das drittoberste hinausragen dürfen, und so weiter. Zeigen Sie anschließend induktiv, wie weit man mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Paketen maximal kommt.

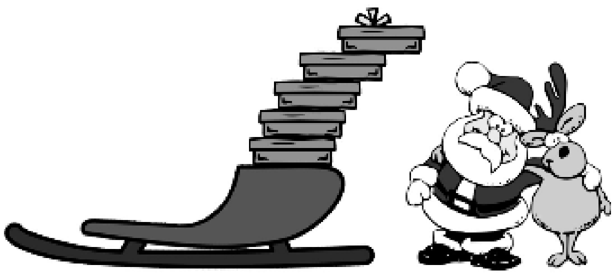

Abbildung 1: Wir wünschen Ihnen allen frohe Festtage und ein erfolgreiches Jahr 2018!