Lösung Beispielaufgabe 1: Separable Differentialgleichung [2] (T0_0102)

a) Die Autonome DGL $\dot{x} = x^2$ kann durch Trennung der Variablen und anschliessende Integration gelöst werden.

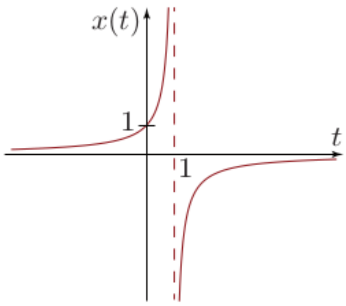
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tilde{t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = t - t_0 \,.$$

Anfangsbedingung (i) ist $x(0) = 1$: $\quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x(t)} + 1 = t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{1-t}}$,
wobei die Lösung auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ definiert ist.

Anfangsbedingung (ii) ist $x(2) = -1$: $\quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x(t)} - 1 = t - 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{1-t}}$,
wobei die Lösung auf dem Intervall $(1, \infty)$ definiert ist.

b) Graphische Analyse der Gleichung $\dot{x} = x^2$:

(i) Für alle $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$ und somit $\dot{x} > 0$, also steigt die Kurve streng monoton. (ii) Für $x = 1$ gilt $\dot{x} = 1$, das legt die Steigung bei $x = 1$ fest. Für $x \to \pm\infty$ gilt $\dot{x} \to \infty$; das deutet darauf hin, dass es einen Wert für t gibt, wo die Kurve divergiert. Laut der expliziten Lösung der Differentialgleichung geschieht dies bei $t = 1$.



Lösung Beispielaufgabe 2 : Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten [3] (T0_0104)

(a) Die allg. Lösung der homogenen Gleichung $\dot{x}_h(t) + 2x_h(t) = 0$ ist: $\boxed{x_h(t) = x_h(0)\mathrm{e}^{-2t}}$.
(Dies finden wir durch Erkennen der Stammfunktion, oder Separation der Variablen.)

(b) Variation der Konstanten: Ansatz: $x_p(t) = \tilde{c}(t)x_h(t) = c(t)\mathrm{e}^{-2t}$.
In DGL einsetzen mit $t_0 = 0,\ c(0) = 0$:

$$t = \dot{x}_p(t) + 2x_p(t) = \left[\dot{c}(t) - 2c(t) + 2c(t)\right]\mathrm{e}^{-2t} = \dot{c}(t)\mathrm{e}^{-2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = t\mathrm{e}^{2t} \,.$$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}\ \tilde{t}\mathrm{e}^{2\tilde{t}} \overset{\text{P.I.}}{=} \tfrac{1}{2}\tilde{t}\mathrm{e}^{2\tilde{t}}\Big|_0^t - \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\tilde{t}} = \tfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\tilde{t}}\Big|_0^t = \tfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{1}{4} \,.$$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = c(t)\mathrm{e}^{-2t} = \boxed{\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}} \,.$$

Anfangsbedingung ist $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_h(0) = 0$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(0)\mathrm{e}^{-2t} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}} \,.$$