Lösung Beispielaufgabe 1: Eigenschaften der Fourier-Transformation [1] (T0_0126)

(a) Fourier-Transformierte von $f(x-a)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x-a) \overset{\bar{x}=x-a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\bar{x}+a)} f(\bar{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\bar{x}} f(\bar{x}) = \boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} \tilde{f}_k}\,.$$

(b) Fourier-Transformierte von $f(ax)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(ax) \overset{\bar{x}=ax}{=} \int_{-\infty\cdot a}^{\infty\cdot a} \mathrm{d}\bar{x}\, \frac{1}{a}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{a}\bar{x}} f(\bar{x})$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{a}\bar{x}} f(\bar{x})\ , & \text{falls } a > 0 \\ \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{a}\bar{x}} f(\bar{x}) = -\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{a}\bar{x}} f(\bar{x})\ , & \text{falls } a < 0 \end{array} \right\} = \boxed{\frac{1}{|a|}\, \tilde{f}_{k/a}}$$

Lösung Beispielaufgabe 2: Fourier-Transformation eines Gauß-Peaks [2] (T0_0125a)

Normierter Gauß-Peak: $$g^{[\sigma]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ g^{[\sigma]}(x) = 1\ . \tag{1}$$

Fourier-Transformierte: $$\tilde{g}_k^{[\sigma]} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} g^{[\sigma]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2+2\sigma^2\mathrm{i}kx\right)}\ .$$

Quadr. Ergänzung: $$\left(x^2 + 2\sigma^2\mathrm{i}kx\right) = \left(x + \sigma^2\mathrm{i}k\right)^2 + \sigma^4k^2 \overset{\bar{x}=x+\sigma^2\mathrm{i}k}{=} \bar{x}^2 + \sigma^4k^2\ .$$

$$\tilde{g}_k^{[\sigma]} \overset{\mathrm{d}x=\mathrm{d}\bar{x}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^4k^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{e}^{-\sigma^2k^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{x}\, g^{[\sigma]}(\bar{x})}_{\overset{(1)}{=}1} = \boxed{\mathrm{e}^{-\sigma^2k^2/2}}.$$

Anmerkung: die Fourier-Transformierte eines Gauß-Peaks mit Breite σ ist offenbar wieder ein Gauß-Peak, mit Breite $1/\sigma$. Das ist eine schöne Illustration von Fourier-Gegensätzlichkeit (englisch:

Fourier-reciprocity): die Fourier-Transformierte eines schmalen Peaks ist ein breiter Peak, und umgekehrt.