Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -\frac{10}{23} & \frac{4}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{3}{23} & -\frac{10}{23} \\ \frac{13}{46} & \frac{2}{23} & \frac{1}{23} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

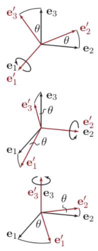
Aufgabe 2

(a) Die Skizzen zeigen die Wirkung einer Rotationen um die i-Achse auf die Basisvektoren:

$$R_\theta(\mathbf{e}_1): \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$R_\theta(\mathbf{e}_2): \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\-\sin\theta\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\sin\theta\\0\\\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$R_\theta(\mathbf{e}_3): \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$



Für $R: \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_i (R_\theta)^i{}_j$ liefert der Bildvektor $\mathbf{e}'_j$ die j-Spalte der Rotationsmatrix:

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}}, \quad R_\theta(\mathbf{e}_2) = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}}, \quad R_\theta(\mathbf{e}_3) = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

(b) Mittels der angegebenen Formel,

$$(R_\theta(\mathbf{n}))^i{}_j = \delta_{ij}\cos\theta + n_i n_j (1-\cos\theta) - \epsilon_{ijk}\, n_k \sin\theta\,, \tag{1}$$

folgt für die Drehachsen $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$ und $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$:

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}(1-\cos\theta) - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\epsilon_{231}\\0&\epsilon_{321}&0\end{pmatrix}\sin\theta = \boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}}. \checkmark$$

$$R_\theta(\mathbf{e}_2) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}(1-\cos\theta) - \begin{pmatrix}0&0&\epsilon_{132}\\0&0&0\\\epsilon_{312}&0&0\end{pmatrix}\sin\theta = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}}. \checkmark$$

$$R_\theta(\mathbf{e}_3) \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}(1-\cos\theta) - \begin{pmatrix}0&\epsilon_{123}&0\\\epsilon_{213}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sin\theta = \boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}}. \checkmark$$

(c) Laut (a) ist $A = R_\pi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix}\cos\pi&-\sin\pi&0\\\sin\pi&\cos\pi&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

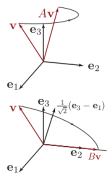
Für $B = R_{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1)$ ist die Drehachse $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$, mit $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$:

$$B \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\epsilon_{123}&0\\\epsilon_{213}&0&-\epsilon_{231}\\0&-\epsilon_{321}&0\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&-1\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\-1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}}.$$

Wirkung auf den Vektor $\mathbf{v} = (1,0,1)^T$:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}.$$

$$B\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&-1\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\-1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{\sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}.$$



(d) Die Rotationsgruppe in drei Dimensionen ist nicht kommutativ. Beispiel: $AB \neq BA$:

$$AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&-1\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\-1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{2}&1\\-\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\-1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}},$$

$$BA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&-1\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\-1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{2}&-1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}}.$$

(e)

$$\mathrm{Tr}(R) = \sum_i (R)^i{}_i \overset{(1)}{=} \sum_i \Big[\delta_{ii}\cos\theta + n_i n_i(1-\cos\theta) - \epsilon_{iik} n_k \sin\theta\Big]$$
$$= 3\cos\theta + \mathbf{n}^2(1-\cos\theta) = \boxed{1 + 2\cos\theta}. \checkmark$$

(f) Der Winkel θ wird, bis auf ein Vorzeichen, durch die Spur von $C \equiv AB$ festgelegt:

$$1 + 2\cos\theta \overset{(e)}{=} \mathrm{Tr}(C) \overset{(d)}{=} \tfrac{1}{2}[(-1) + 0 + 1] = 0\,, \quad \Rightarrow \quad -\cos\theta = \tfrac{1}{2}\,, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \pm\tfrac{2}{3}\pi}.$$

Die Komponenten n_i der Rotationsachse werden, bis auf ein Vorzeichen, durch die Diagonalelemente von C festgelegt:

$$(C)^i{}_i \overset{(1)}{=} \cos\theta + (n_i)^2(1-\cos\theta) \qquad \Rightarrow \qquad n_i = \pm\sqrt{\frac{(C)^i{}_i - \cos\theta}{1-\cos\theta}}\,.$$

$$n_1 \overset{(d)}{=} \pm\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \boxed{0}, \quad n_2 \overset{(d)}{=} \pm\sqrt{\frac{0+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \boxed{\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}}, \quad n_3 \overset{(d)}{=} \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \boxed{\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}}.$$

Da der Vektor $\mathbf{n}$ und der Winkel θ nur bis auf eine Punktspiegelung am Ursprung eindeutig bestimmt sind, kann das Vorzeichen von einer der Komponenten n_i frei gewählt werden – wir entscheiden uns, n_2 positiv zu wählen, also $n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Die Vorzeichen von θ und n_3 können nun aus der Betrachtung der Nicht-Diagonalelemente von C gewonnnen werden. Da $n_1 = 0$, gilt $(C)^1{}_j \overset{(1)}{=} 0 + 0 - \epsilon_{1jk} n_k \sin\theta$, folglich:

$$\tfrac{1}{2} \overset{(d)}{=} (C)^1{}_3 = n_2\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \boxed{\tfrac{2}{3}\pi},$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} \overset{(d)}{=} (C)^1{}_2 = -n_3\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad n_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta} = \boxed{-\sqrt{\tfrac{2}{3}}}.$$