Lösung Beispielaufgabe 1: Taylor-Reihen

(a) Lösungsweg 1: Wir verwenden die bekannten Reihenentwicklungen der geometrischen Reihe, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (für $|x| < 1$), und des Sinus, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-[x+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)]} \\ &= 1 + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right] + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right]^2 + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right]^3 + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right]^4 \mathcal{O}(x^5) \\ &= 1 + x - \tfrac{1}{6}x^3 + x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5) \\ &= \boxed{1 + x + x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^5)}\,. \end{aligned}$$

Lösungsweg 2: Bestimmung der Taylor-Koeffizienten durch iteratives Ableiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{1-\sin x}, && \Rightarrow \quad f(0) = \boxed{1}. \\ f^{(1)}(x) &= \tfrac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2} && \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = \boxed{1}. \\ f^{(2)}(x) &= \tfrac{2\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^3} - \tfrac{\sin(x)}{(1-\sin(x))^2} && \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = \boxed{1}. \\ f^{(3)}(x) &= \tfrac{6\cos^3(x)}{(1-\sin(x))^4} - \tfrac{6\sin(x)\cos(x)}{(1-\sin(x))^3} - \tfrac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2} && \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = \boxed{5}. \\ f^{(4)}(x) &= \tfrac{24\cos^4(x)}{(1-\sin(x))^5} - \tfrac{36\sin(x)\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^4} + \tfrac{6\sin^2(x)}{(1-\sin(x))^3}\,. \\ &\quad - \tfrac{8\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^3} + \tfrac{\sin(x)}{(1-\sin(x))^2} && \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = \boxed{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f(x) &= f(0) + f^{(1)}(0)x + \tfrac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \tfrac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right) \\ &= \boxed{1 + x + x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^5)}\,. \end{aligned}$$

(b) Lösungsweg 1: über die Reihenentwicklungen der Exponentialfunktion und des Cosinus:

$$h(x) = \mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}^{\left[1-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)\right]} = \mathrm{e}^1 \mathrm{e}^{-\left[\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)\right]} = \boxed{\mathrm{e}\left[1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right]}\,.$$

Anmerkung: Das Herausfaktorisieren von e^1 vor dem Taylor-Entwickeln ist notwendig, damit die bekannten Reihe der Exponentialfunktion in einer Form (nämlich $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$) genutzt werden kann, bei der das Argument im Limes $x \to 0$ verschwindet, so dass die Reihe nach wenigen Termen abgebrochen werden kann. Falls stattdessen $\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x^2}$ in Potentzen des vollen Arguments, $(1 - \frac{1}{2}x^2)$, entwickelt wird, ist die volle Taylor-Reihe mit unendlich vielen Terme erforderlich, um für $x \to 0$ das korrekte Ergebnis, nämlich e^1, zu erhalten:

$$\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(1 - \tfrac{1}{2}x^2)^l \xrightarrow{x=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \mathrm{e}^1\,.$$

Um auf diesem Weg auch den zweiten Term der Taylor-Entwicklung von $h(x)$, nämlich $-\frac{1}{2}x^2$, zu erhalten, braucht man das Binomialtheorem, $(1+y)^l = \sum_{k=0}^{l} \frac{l!y^k}{k!(l-k)!}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x^2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(1 - \tfrac{1}{2}x^2)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \frac{l!(-\frac{1}{2}x^2)^k}{k!(l-k)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left[1 + l(-\tfrac{1}{2}x^2) + \mathcal{O}(x^4)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l-1)!}(-\tfrac{1}{2}x^2) + \mathcal{O}(x^4) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1\tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\,. \checkmark \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dieser Weg viel umständlicher, als direkt $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ zu entwickeln!

Lösungsweg 2: Bestimmung der Koeffizienten durch iteratives Ableiten:

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathrm{e}^{\cos x}, && \Rightarrow \quad h(0) = \boxed{\mathrm{e}^1}. \\ h^{(1)}(x) &= -\sin x\ \mathrm{e}^{\cos x}, && \Rightarrow \quad h^{(1)}(0) = \boxed{0}. \\ h^{(2)}(x) &= -\cos x\ \mathrm{e}^{\cos x} + (-\sin x)^2\ \mathrm{e}^{\cos x}, && \Rightarrow \quad h^{(2)}(0) = \boxed{-\mathrm{e}^1}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = h(0) + h^{(1)}(0)x + \tfrac{1}{2}h^{(2)}(0)\ x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) = \boxed{\mathrm{e} - \mathrm{e}\tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}\,.$$

Die für Lösungsweg 1 diskutierte Frage, ob ein Faktor e^1 herauszuziehen ist oder nicht, tritt bei Lösungsweg 2 gar nicht auf. Die Strategie des iterativen Ableitens und $x = 0$ Einsetzens findet automatisch die richtige Antwort. Insofern ist Lösungsweg 2 im allgemeinen einfacher zu handhaben, weil es keine Subtilitäten zu berücksichtigen gibt.