Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 1

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 26.04.2017**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Problem 1: Variablentrennung (*8 Punkte*)

Seperation der Variablen ist eine Methode zur Lösung von Differentialgleichungen. Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung so umgeschrieben werden kann, dass die linke Seite nur von y und die rechte Seite nur von x abhängt. (*2 Punkte*)

(b) Integration beider Seiten dieser Gleichung liefert eine allgemeine Lösung des Problems. Wenden Sie die Methode auf folgende Gleichung an

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung einen freien Parameter beinhaltet. (*4 Punkte*)

(c) Der letzte Schritt dieser Methode ist die Bestimmung der freien Parameter mittels Anfangsbedingungen. Wie ist die endgültige Lösung für $y(1) = \alpha$? (*2 Punkte*)

Problem 2: Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (*10 Punkte*)

Betrachten Sie eine sich entlang der x-Achse bewegende Masse m an einer Feder mit Federkonstante k, wobei an der Masse die Reibungskraft $F_F = -\alpha\dot{x}$ angreift.

(a) Leiten Sie mithilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes die Bewegungsgleichung her. (*1 Punkt*)

(b) Die Bewegungsgleichung ist die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung. Schlagen Sie einen Lösungsansatz vor und verifizieren Sie diesen. (*2 Punkte*)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

wobei $\dot{x}$ die erste und $\ddot{x}$ die zweite Ableitung nach der Zeit bezeichnen.

(c) Bestimmen Sie mithilfe Ihres Ansatzes das charakteristische Polynom dieser Gleichung und bestimmen Sie dessen Nullstellen. (*2 Punkte*)

(d) Nehmen Sie eine starke Dämpfung des Systems an, d.h. $\Delta > 0$ mit $\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von zwei Konstanten A und B. (*4 Punkte*)

(e) Nutzen Sie die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2$, um diese Konstanten zu bestimme.
(*1 Punkt*)

Problem 3: Kugelkoordinaten (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die Position eines Teilchens mit Masse m in Kugelkoordinaten, gegeben durch den Vektor $\mathbf{r} = r\hat{r}$ mit radialem Einheitsvektor $\hat{r}$.

(a) Berechnen Sie die kinetische Energie des Teilchens in Kugelkoordinaten. (*5 Punkte*)

(b) Berechnen Sie die Beschleunigung des Teilchens in Kugelkoordinaten. Ist dieser Ausdruck nützlich für praktische Anwendungen? (*5 Punkte*)

Problem 4: Linienintegrale (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die Vektorfelder $F = xy\hat{e}_x$ und $G = 2x\hat{e}_x + \hat{e}_y$.

(a) Berechnen Sie direkt jeweils das Linienintegral entlang eines Kreises mit Radius 2 um den Ursprung, wobei die Trajektorie im Punkt (0,2) beginnt und in (2,0) endet. (*5 Punkte*)

(b) Berechen Sie obige Linienintegrale nun mithilfe der Rotation des Vektorfeldes oder dem Gradienten eines skalaren Feldes. (*5 Punkte*)