Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017 **Abgabe 28.06.2017**

Aufgabe 1: Abplattung der Erde (*10 Punkte*)

Die Erde ist in guter Näherung ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = b > c$. Die Gravitationsenergie W_{grav} und die Masse M eines Rotationsellipsoid mit homogener Massendichte ρ_0 sind

$$W_{grav} = -\frac{3GM^2}{5a}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}$$
$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^2 c = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$$

Dabei wurden die Exzentrizität $\epsilon = (1 - c^2/a^2)^{1/2}$ und der mittlere Radius $R = (a^2c)^{1/3}$ verwendet. Das Rotationsellipsoid rotiert im körperfesten System mit dem Drehimpuls $L_3 = \Theta_3\omega_3$ um die Figurenachse. Dann ist seine Gesamtenergie

$$W_{total}(\epsilon) = T_{rot} + W_{grav} = \frac{L_3^2}{2\Theta_3(\epsilon)} + W_{grav}(\epsilon) \tag{1}$$

Die deformierbare Erde stellt sich nun so ein, dass W_{total} als Funktion der Exzentrizität ϵ minimal wird; dabei sind der Drehimpuls L_3 und die Masse M fest vorgegeben.

(a) Entwickeln Sie W_{grav} und das Trägheitsmoment Θ_3 bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in ϵ. (*5 Punkte*)

(b) Berechnen Sie hieraus die Erdabplattung $(a - c)/a$ (*5 Punkte*)

Hinweis: Tatsächlich ist die Dichte der Erde inhomogen und nimmt zum Erdmittelpunkt hin zu (Eisenkern). Ein Modell aus konzentrischen Ellipsoidenschalen unterschiedlicher Dichte liefert daher bessere Ergebnisse
Das der Erde am besten angepasste Rotationsellipsoid heißt Referenzellipsoid. Es hat die Halbachse $a = 6378.137$km, $c = 6356.753$km und die Abplattung $(a - c)/a = 1/298.26$. Die reale Gestalt der Erde, die durch die Pberfläche der Ozeane (im hypothetischen statischen Gleichgewicht) gegeben ist, wird Geoid genannt. Dabei denkt man sich die Ozeane unter den Kontinenten fortgesetzt.
Die Abweichung des Geoids vom Referenzellipsoid werden in der Geodätik vermessen und betragen etwa bis zu 100 Meter. Die Abweichungen rühren daher, dass das Geoid zu einer niedrigeren Energie $T_{rot} + T_{grad}$ führt als ein Rotationsellipsoid. Zusätzlich spielen auch lokale Inhomogenitäten eine Rolle, die im Geoid berücksichtigt werden.

Aufgabe 2: Schaukelbewegung einer Halbkugel (*15 Punkte*)

Eine starre Halbkugel mit Radius R und konstanter Massendichte ρ_0 führt im Schwerefeld eine Schaukelbewegung auf einer horizontalen Ebene aus; die Kugel rollt dabei auf der Ebene ab. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht. Geben Sie die Lage des Schwerpunktes S in Abhängigkeit vom Winkel Φ an. Stellen Sie die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen der Gleichgewichtslage an. Geben Sie die allgemeine Lösung dazu an.

(a) Betrachten Sie zunächst die Koordinate z_S (in Kugelkoordinaten), die im oberen Teil der Abbildung gezeigte Ruhelage. Aus Symmmteriegründen gelte $x_S = y_S = 0$ (*3 Punkte*)

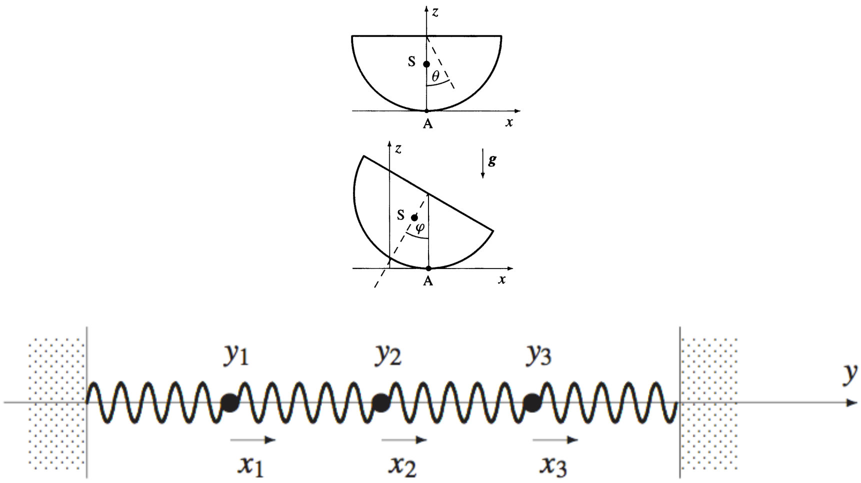

Abbildung 1: Hilfsskizzen zu Aufgabe 2 (oben) und Aufgabe 3 (unten)

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht. *(2 Punkte)*

(c) Berechnen Sie die kinetische Energie des Schwerpunkts, die Rotationsenergie und die potenzielle Energie. *(5 Punkte)*

(d) Im Fall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage, entwickeln Sie die Winkelgeschwindigkeit und die allgemeine Lösung der Lagrangefunktion. *(5 Punkte)*

Aufgabe 3: Lineare Kette mit 3 Teilchen *(15 Punkte)*

Wir betrachten 3 Teilchen mit derselben Masse m, die mit masselosen Federn verbunden sind (alle mit gleicher Federkonstante k). Wie in Abb. 1 dargestellt sind die Federn mit den Enden fest verbunden. Zur Beschreibung verwenden wir die Koordinaten $x_i(t)$, die den Unterschied zwischen der tatsächlichen Position des i-ten Teilchens $y_i(t)$ und seiner Gleichgewichtslage y_{i0} bezeichnen, also gilt $x_i(t) = y_i(t) - y_{i0}$. Die Lagrangefunktion des Systems ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}\left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2\right].$$

(a) Was beschreiben die Terme $-\frac{k}{2}x_1^2$ und $-\frac{k}{2}x_3^2$, die in der Lagrangefunktion auftauchen? *(1 Punkt)*

(b) Die Lagrangefunktion kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j).$$

Wie sehen die zugehörigen Matrizen T und V aus? *(2 Punkte)*

(c) Berechnen Sie die Frequenzen der drei Eigenmoden des Systems. *(4.5 Punkte)*

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren. *(4.5 Punkte)*

(e) Skizzieren Sie für jede Eigenmode ein einfaches Diagramm, welches die zugehörige Bewegung beschreibt. *(3 Punkte)*