

Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

Lukas Theis, M.Sc.

Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017

Abgabe 05.07.2017

Achtung! Die Termine für beide Klausuren stehen fest:

- Erste Klausur: Di, 08.08.2017, 09:00 - 12:00, C6.3 großer Hörsaal
- Zweite Klausur: Mi, 27.09.2017, 09:00 - 12:00, E1.3, HS003

Aufgabe 1: Eindimensionales Kristallmodell I (10 Punkte)

Die Massen $m_n = m$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ können sich längs der y-Achse bewegen. Harmonische Federn (Federkonstante k) zwischen benachbarten Massen führen zu den Gleichgewichtslagen $y_n^0 = an$; die Länge a ist die Gitterkonstante dieses eindimensionalen Kristallmodells. Die Auslenkungen aus dem Gleichgewicht werden mit $x_n(t) = y_n(t) - y_n^0$ bezeichnet.

- Geben Sie die Lagrangefunktionen und die Bewegungsgleichungen für diese unendliche Kette an. (2 Punkte)
- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz $x_n(t) = Q_q(t)e^{iqna}$ und $Q_q(t) = A_q e^{-i\omega_q t}$. (3 Punkte)
- Diese Lösung wird durch die reelle Wellenzahl q charakterisiert. Begründen Sie, dass a auf den Bereich $-\pi/a \neq q \neq \pi/a$ beschränkt werden und skizzieren Sie die Eigenfrequenzen $\omega_q = \omega(q)$ als Funktion von q . Diese Beziehung nennt man *Dispersionsrelation*. (2 Punkte)
- Die physikalische Randbedingung einer endlichen Kette aus N Massen kann durch die periodische Randbedingung $x_n(t) = x_{n+N}(t)$ simuliert werden. Zu welchen diskreten Werten von q führt diese Randbedingung? (3 Punkte)

Aufgabe 2: Eindimensionales Kristallmodell II (10 Punkte)

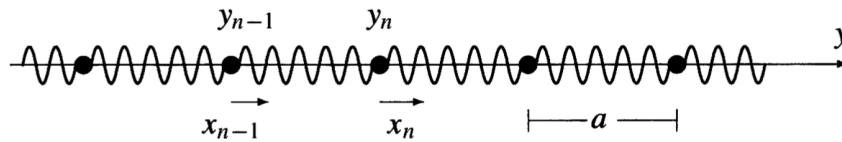
Die Massen $m_{2n} = m$ und $m_{2n+1} = M$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ können sich längs der y-Achse bewegen. Harmonische Federn (Federkonstante k) zwischen benachbarten Massen führen zu den Gleichgewichtslagen $y_n^0 = a \cdot \nu$; die Länge a ist die Gitterkonstante dieses eindimensionalen Kristallmodells aus zwei Atomsorten. Die Auslenkung aus dem Gleichgewicht werden mit $x_{n\nu}(t) = y_\nu(t) - y_\nu^0$ bezeichnet.

- Geben Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen an. Reduzieren Sie die Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz

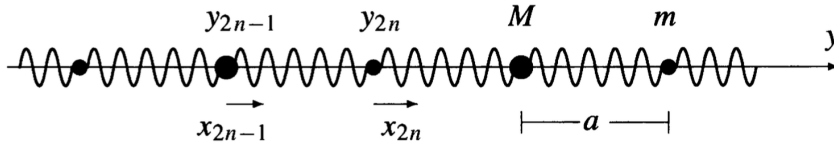
$$x_{2n}(t) = Q_q(t)e^{iq(2n)a}, \quad x_{2n+1}(t) = P_q(t)e^{iq(2n+1)a}$$

mit $Q_q(t) = A_q e^{-i\omega_q t}$ und $P_q(t) = B_q e^{-i\omega_q t}$ auf zwei gekoppelte Gleichungen für A_q und B_q . (5 Punkte)

- Lösen Sie diese Gleichungen. Berechnen und skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega_q = \omega(q)$ als Funktion von q . Wählen Sie dazu einen geeigneten Bereich für die Wellenzahl q . (5 Punkte)



(a)



(b)

Abbildung 1: Skizzen zum eindimensionalen Kristallmodell I (a) und II (b).

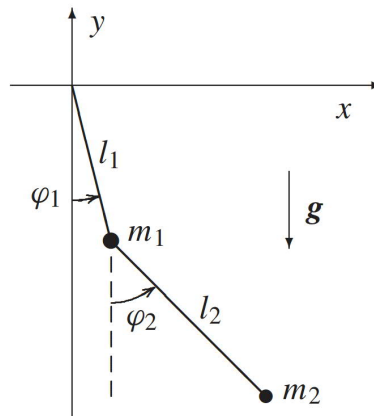


Abbildung 2: Doppelpendel in der x - y -Ebene.

Aufgabe 3: Doppelpendel

(10 Punkte)

- (a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen für das Doppelpendel aus Abb.2 auf und konstruieren Sie daraus die Lagrangefunktion des Systems. (2 Punkte)

- (b) Wählen Sie nun die Koordinaten $x_i = l_i \varphi_i$ und entwickeln Sie die Lagrangefunktion bis zur quadratischen Ordnung in den kleinen Auslenkungen. (2 Punkte)

- (c) Geben Sie die Matrizen T und V an, mit denen sich die Lagrangefunktion in der Form

$$\mathcal{L} = (\dot{x}^T T \dot{x} - x^T V x)/2 + \text{const}$$

schreiben lässt.

(3 Punkte)

- (d) Geben Sie durch Lösen der Eigenwertgleichung

$$(V - \omega^2 T)A = 0$$

Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren des Systems für den Fall $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$ an.

(3 Punkte)

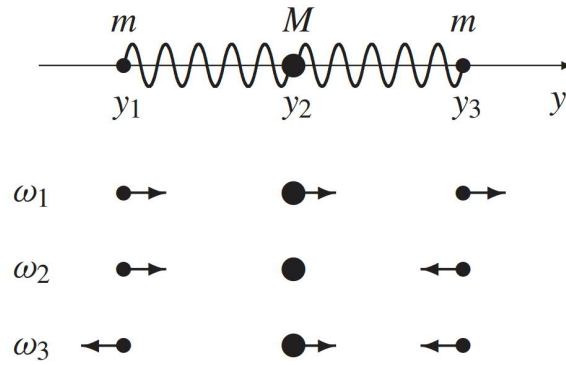


Abbildung 3: Eigenmoden eines linearen, dreiatomigen Moleküls.

Aufgabe 4: Normalkoordinaten für Molekülschwingung (10 Punkte)

Die Atome (Massen m , M und m) eines dreiatomigen Moleküls können eindimensionale Schwingungen ausführen. Die Schwingungstypen sind in Abb.3 skizziert. Die zu den Schwingungen gehörigen Eigenvektoren sind gegeben durch

$$A^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus ihnen lässt sich die quadratische Matrix

$$a = (a_{ik}) = \left(A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, A_i^{(3)} \right)$$

bilden.

- Bestimmen Sie die Koeffizienten c_i aus der Normierung $a^T T a = 1$ mit $T = \text{diag}(m, M, m)$.
- Geben Sie die Normalkoordinaten $Q_k = Q_k(x)$ an.