Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017 **Abgabe 12.07.2017**

Achtung! Die Termine für beide Klausuren stehen fest:

- Erste Klausur: Di, 08.08.2017, 09:00 - 12:00, C6.3 großer Hörsaal
- Zweite Klausur: Mi, 27.09.2017, 09:00 - 12:00, E1.3, HS003

Aufgabe 1: Poissonklammern (*10 Punkte*)

(a) Beweisen Sie die folgenden Relationen für Poissonklammern:

(i) Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (*0,5 Punkte*)

(ii) Linearität: $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\} \quad c_{1,2} = \text{const}$ (*1 Punkt*)

(iii) Nullelement: $\{c, g\} = 0 \quad \forall g = g(\vec{q}, \vec{p}), \quad c = \text{const}$ (*0,5 Punkte*)

(iv) Produktregel: $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$ (*1 Punkt*)

(v) Jacobi-Identität: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (*3 Punkte*)

(b) Beweisen Sie, dass die Poissonklammer zweier Integrale der Bewegung ebenfalls ein Integral der Bewegung ist. (*4 Punkte*)

Aufgabe 2: Teilchen im Magnetfeld (*15 Punkte*)

Ein Elektron (Masse m, Ladung $-e$) befinde sich in einem homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = (0, 0, B) = \nabla \times \vec{A}.$$

Für das Vektorpotential gelte die Coulomb-Eichung, d.h.

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$$

eine denkbare Darstellung des mehrdeutigen Vektorpotentials ist. (*1 Punkt*)

(b) Setzen Sie

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Verifizieren Sie die folgende Form der Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{p_3^2}{2m} + H_0$$
$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_1 - \frac{1}{2}m\omega_c q_2\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_2 + \frac{1}{2}m\omega_c q_1\right)^2$$

mit $\omega_c = eB/m$. (*4 Punkte*)

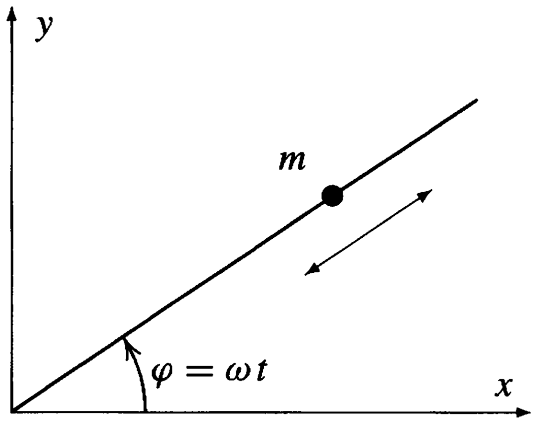

Abbildung 1: Massenpunkt auf rotierender Stange

(c) Betrachten Sie ab jetzt ausschließlich H_0, d.h. $H(p_3 = 0)$. Eine Phasenraumtransformation

$$(\vec{q}, \vec{p}) \longrightarrow (\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}})$$

werde durch die Erzeugende

$$F_1(\vec{q}, \hat{\vec{q}}) = m\omega_c \left(q_1\hat{q}_1 + q_2\hat{q}_2 - \hat{q}_1\hat{q}_2 - \frac{1}{2}q_1q_2 \right)$$

bewirkt. Berechnen Sie die Transformationsformeln (*5 Punkte*)

$$\begin{aligned} \vec{q} =& \vec{q}(\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}}), \quad \vec{p} = \vec{p}(\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}}), \\ \hat{\vec{q}} =& \hat{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}), \quad \hat{\vec{p}} = \hat{\vec{p}}(\vec{q}, \vec{p}). \end{aligned}$$

(d) Wie sieht die transformierte Hamiltonfunktion

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}})$$

aus? Welches Bewegungsproblem bleibt zu lösen? (*2 Punkte*)

(e) Versuchen Sie die Transformationsformeln aus Teil (c) auf eine Erzeugende vom Typ

$$F_2 = F_2(\vec{q}, \hat{\vec{p}})$$

zurückzuführen. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3: Massenpunkt auf rotierender Stange (*10 Punkte*)

Ein Massenpunkt auf der rotierenden Stange (vgl. Abb. 1) wird durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2\right)$$

beschrieben.

(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf. (*2 Punkte*)

(b) Stellen Sie mit Hilfe der Hamiltonfunktion die Bewegungsgleichungen des Systems auf und finden Sie damit die allgemeine Lösung, die die Dynamik des Massenpunktes beschreibt. (*4 Punkte*)

(c) Prüfen Sie ob $\partial H/\partial t = 0$ und $H = \text{const.}$ gilt. (*2 Punkte*)

(d) Treffen Sie eine Aussage darüber ob H gleich der Energie des Massenpunktes ist. Ist die Energie erhalten? (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Freier Oszillator mit Potenzialterm (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie einen freien harmonischen Oszillator und nehmen Sie einen zusätzlichen linearen Potentialterm $F_0 x$ an (entspricht einer konstanten, homogenen Kraft). Zeigen Sie, dass das resultierende System wieder ein hamronischer Oszillator ist. Stellen Sie dazu die entsprechende HAmiltonfunktion auf und zeigen Sie, dass sie diese in die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators überführen können. (*2 Punkte*)

(b) Nehmen Sie der Oszillator sei in Ruhe. Zur Zeit $t = 0$ werde der lineare Term angeschaltet. Lösen Sie. (*2 Punkte*)

(c) Nehmen Sie weiter an, der Term wird zur Zeit T wieder ausgeschaltet. Lösen Sie.(*3 Punkte*)

(d) Betrachten Sie den Grenzfall $T \to 0$ mit $f_0 = F_0 T$ konstant und lösen Sie. (*3 Punkte*)