

Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik

Übungsblatt 13

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

Lukas Theis, M.Sc.

Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017

Abgabe 19.07.2017

Achtung! Die Termine für beide Klausuren stehen fest:

- Erste Klausur: Di, 08.08.2017, 09:00 - 12:00, C6.3 großer Hörsaal
- Zweite Klausur: Mi, 27.09.2017, 09:00 - 12:00, E1.3, HS003

Aufgabe 1: Saitenschwingung und Lösungsmethode nach D'Alembert (15 Punkte)

Die Auslenkung $u(x, t)$ einer Saite genügt der Wellengleichung und der Randbedingung

$$\begin{aligned}u''(x, t) - \ddot{u}(x, t)/c^2 &= 0 \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, t)$ für die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = A \left(1 - \left| 1 - \frac{2x}{l} \right| \right), \quad \dot{u}(x, 0) = 0$$

(5 Punkte)

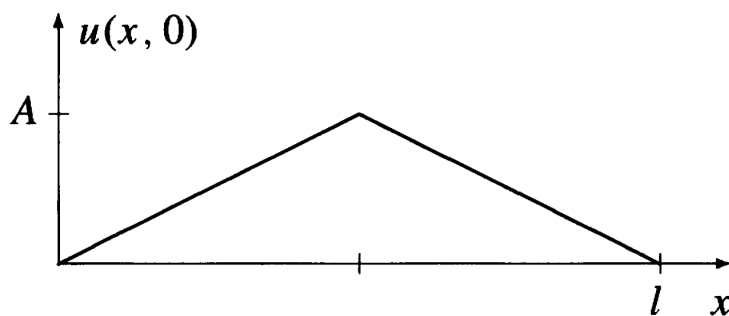
(b) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung $u''(x, t) - \ddot{u}(x, t)/c^2 = 0$ durch

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad \text{und} \quad u(x, t) = g(x + ct)$$

gelöst wird. Dabei sind f und g beliebige Funktionen einer Variablen (3 Punkte)

(c) Wie hängen f und g mit den Anfangsbedingungen zusammen? (2 Punkte)

(d) Wenden Sie die Lösungsmethode nach d'Alembert auf die Saitenschwingung aus Aufgabenteil (a) an. Berechnen Sie damit $u(x, t)$ für $0 \neq t \neq T/4$ mit $T = 2l/c$. Das Ergebnis für die ganze Periode erhalten Sie dann aus Symmetrieüberlegungen. (5 Punkte)



Aufgabe 2: Schwingende Membran

(10 Punkte)

Wir betrachten eine zweidimensionale elastische Membran in der x - y -Ebene, die bei $x = 0$ und $x = l_x$ sowie bei $y = 0$ und $y = l_y$ eingespannt ist. Gesucht ist die allgemeine Lösung $q_z(t, x, y)$ für die Auslenkung der Membran entlang der z -Achse. Dies könnte beispielsweise das einfache Modell einer rechteckigen Trommel sein. Man kann die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite verallgemeinern und findet für die Membran ganz analog

$$\ddot{q}_z - v_{\perp}^2 \left(\frac{\partial^2 q_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial y^2} \right) = 0, \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (1)$$

wobei ρ die auf die Fläche bezogene Massendichte ist und die Spannung τ die zur Kraft analoge Größe. Die Spannung hat die Bedeutung einer Kraft pro Länge, d.h. pro eingespannter Einheitslänge wirkt die Kraft τ auf den Rand der Membran. Die Gesamtkraft, die bei $x = 0$ bzw. $x = l_x$ die Membran einspannt, ist also $-\tau l_y$ bzw. $+\tau l_y$. Analog für die Kraft an den fixierten Enden in y -Richtung. Die Membran sei ansonsten kräftefrei.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $q_z(t, x, y) = f(t)g(x)h(y)$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= C_f \sin(\omega t - \phi_f) \\ g(x) &= C_g \sin(k_x x - \phi_g) \\ h(y) &= C_h \sin(k_y y - \phi_h) \end{aligned}$$

die Differenzialgleichung (1) der Membran löst. Wie lautet die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k_x, k_y)$? (4 Punkte)

(b) Wie sind die Integrationskonstanten zu wählen, damit die Randbedingungen erfüllt werden? (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie dann, dass die allgemeine Lösung durch eine Fourierreihe in x und y gegeben ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Poiseuille-Fluss im Rohr

(15 Punkte)

Betrachten Sie ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R) entlang der z -Achse. Ein Druckgradient $\nabla P = (0, 0, -P') = \text{const}$ treibt eine inkompressible Strömung an, von der angenommen werden kann, dass sie stationär ist.

(a) Überlegen Sie sich wie sich eventuell vorliegende Symmetrien auf die Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla P + \eta \Delta \vec{u} \quad (2)$$

auswirken. Denken Sie insbesondere an die mögliche Strömungsrichtung und von welchen Variablen das Geschwindigkeitsfeld tatsächlich abhängt. (3 Punkte)

(b) Nutzen Sie die Symmetriüberlegungen aus Teil (a) und leiten Sie ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen (2) und unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohres verschwindet, das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\rho)$ ab. (8 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten und den entsprechenden Laplace-Operator

$$\Delta f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Fordern Sie bei der Integration, dass \vec{u} für $\rho \rightarrow 0$ nicht divergieren soll.

(c) Berechnen Sie außerdem den Volumenstrom durch eine Querschnittsfläche des Rohres. (4 Punkte)