Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 03.05.2017**

Info: *Bitte schreiben Sie den Namen der Vorlesung sowie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt. Tackern Sie alle Blätter zusammen. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Problem 1: Krummlinige Koordinaten (*10 Punkte*)

Betrachten Sie folgende Parametrisierung von Koordinaten in der xy-Ebene: $x = se^u$ und $y = se^{-u}$, wobei $u \in \mathbb{R}$ und $s > 0$.

(a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{u}$ und $\hat{s}$ dieses Koordinatensystems. (*2 Punkte*)

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{u}$ und $\hat{s}$ orthogonal zueiander sind. (*2 Punkte*)

(c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor in den gegebenen Koordinaten. (*2 Punkte*)

(d) Geben Sie an, wie die Beschleunigung im krummlinigen System lautet. (*2 Punkte*)

(e) Skizzieren Sie zum Beispiel mithilfe eines Computers die Koordinaten s, u als Funktion der kartesischen Koordinaten $(x, y > 0)$. (*2 Punkte*)

Problem 2: Bahnkurve eines Massepunktes - Erhaltungssätze (*10 Punkte*)

Ein Massenpunkt bewegt sich auf folgender Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos(\omega t), b\sin(\omega t), ct)\,.$$

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve (*1 Punkt*)

b) Benutzen Sie das zweite Newtonsche Axiom um das Potenzial unter dessen Einfluss sich der Massenpunkt bewegt auszurechen. (*4 Punkte*)
Hinweis: Für konservative Systeme gilt: $-\nabla U(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$

c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens und zeigen Sie, dass diese eine Erhaltungsgröße beschreibt. (*3 Punkte*)

d) Finden Sie einen Ausdruck für den Drehimpuls des Massepunktes und zeigen Sie, dass auch dieser erhalten bleibt. (*2 Punkte*)

Problem 3: Periodische Bewegung innerhalb einer Falle (*10 Punkte*)

Betrachten Sie ein Teilchen innerhalb eines Fallenpotentials $U = \alpha|x|^q$ mit $q > 0$ und Gesamtenergie $E > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung mithilfe der Gesamtenergie des Systems. (*2 Punkte*)

(b) Drücken Sie die Periode der Bewegung durch ein Integral aus (*2 Punkte*)

(c) Nutzen Sie die Substitution

$$u = x\left(\frac{\alpha}{E}\right)^{1/q},$$

um das Integral dimensionslos zu machen. Klammern Sie relevante Konstanten aus. Für welche Werte von q hängt die Periode nicht von der Energie ab? *(4 Punkte)*

(d) Beachten Sie, dass es sich um ein Integral über die Ableitung einer trigonometrischen Funktion handelt. Leiten Sie damit einen allgemeinen Ausdruck für die Periode her. *(2 Punkte)*

Problem 4: Zuckerhut (*10 Punkte*)

Betrachten Sie ein Teilchen, das sich unter Einfluss eines eindimensionalen, umgekehrten (negativen) harmonischen Potentials bewegt.

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Teilchens (gegeben durch $dE/dt = 0$)? *(1 Punkt)*

(b) Finden Sie zwei Lösungen zu obiger Differentialgleichung, indem Sie einen exponentiellen Ansatz wählen. *(2 Punkte)*

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung für die Anfangsposition x_0 und anfängliche Geschwindigkeit v_0 an. *(2 Punkte)*

(d) Was sind die möglichen Trajektorien des Teilchens je nach $x_0 \neq 0$ und $v_0 \neq 0$? *(2 Punkte)*

(e) Was lässt sich daraus über die Energie des Systems sagen? *(2 Punkte)*

(f) Es existiert eine weitere Lösung für den Fall dass x_0 und v_0 beide verschwinden. Was sagen uns die vorigen Resultate über dieses Ergebnis? *(1 Punkt)*