Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 10.05.2017**

Info: *Bitte schreiben Sie den Namen der Vorlesung sowie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt. Tackern Sie alle Blätter zusammen. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Problem 1: Höhenlinien und Gradient (*5 Punkte*)

Höhenlinien sind Linien in der Zahlenebene (x, y), auf denen eine Funktion $f(x, y)$ konstant ist.

a) Skizzieren Sie die Höhenlinien von

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{und} \qquad f_2(x,y) = -x^2y^2$$

(*2 Punkte*)

b) Berechnen Sie die Gradienten $\nabla f_1(x, y)$ und $\nabla f_2(x, y)$. (*1 Punkt*)

c) Zeichnen Sie die Gradienten in die Skizze mit den Höhenlinien ein. Welche Richtung hat der Gradient? (*2 Punkte*)

Problem 2: Extrema (*15 Punkte*)

a) Finden Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = x^4 + y^4$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$. Geben Sie jeweils an ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. (*3 Punkte*)

b) Finden Sie die Minima und Maxima von $f(x, y) = x^2+2y^2$ auf dem Einheitskreis $x^2+y^2 = 1$. (*3 Punkte*)

c) Finden Sie die minimale Entfernung vom Ursprung zur Kurve $x^2+8xy+7y^2 = 225$.(*3 Punkte*)

d) Finden Sie das Rechteck mit maximaler Fläche, das noch in die Ellipse $x^2 + y^2 = 1$ passt. (*3 Punkte*)

e) Finden Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2y+x \sin y$ mit $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$. Geben Sie jeweils an ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt (*3 Punkte*)

Problem 3: Extremalisierung mit Nebenbedingungen (*10 Punkte*)

Im Folgenden wollen wir zwei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen untersuchen.

(a) Was ist der kürzeste Abstand zwischen der Geraden $y = x+4$ und der Ellipse $x^2+4y^2 = 4$?

(i) Was sollten Sie vor Bearbeitung der Fragestellung zunächst überprüfen? (*1 Punkt*)

(ii) Geben Sie die zu minimierende Funktion und alle auftretenden Nebenbedingungen an. (*2 Punkte*)

(iii) Lösen Sie die Fragestellung mithilfe der Methode Lagrangeschen Multiplikatoren. (*3 Punkte*)

(b) Welcher ist der volumensgrößte Quader, den man in das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einschreiben kann? (*4 Punkte*)

Problem 4: Lagrangesche Multiplikatoren (*10 Punkte*)

Sei die Ladungsverteilung auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ gegeben durch $q = xyz$. Finden Sie jene Punkte auf der Kugeloberfläche, auf denen q am größten ist. Nutzen Sie dazu die Methode der Lagrangschen Multiplikatoren.