Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 17.05.2017**

Info: *Bitte schreiben Sie den Namen der Vorlesung sowie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt. Tackern Sie alle Blätter zusammen. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Problem 1: Euler-Lagrange-Gleichung (*10 Punkte*)

a) Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung, um herauszufinden, unter welcher Bedingung folgender Erhaltungssatz gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

wobei $F = F(x, y, y')$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $y = y(x)$ ist.

b) In diesem Aufgabenteil wollen wir mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung herausfinden was die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist.

i) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Länge der Verbindungsstrecke zweier Punkte an. (*1 Punkt*)

ii) Nutzen Sie ihr Ergebnis aus i) und die Euler-Lagrange-Gleichung um zu zeigen, dass das Minimum der Längenfunktion einer Geraden entspricht (*2 Punkte*)

c) Wir betrachten die Fläche die entsteht, wenn eine allgemeine Verbindungslinie zwischen zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) um die y-Achse rotiert (vgl. Abb. 1).

i) Finden Sie einen Ausdruck für den Flächeninhalt der Rotationsfläche (*2 Punkte*)
Hinweis: Betrachten Sie erst die Streifenfläche der Breite ds *und geben Sie damit die Gesamtfläche als Integral an.*

i) Nutzen Sie die Euler-Lagrange Gleichung um die Funktion $y(x)$ zu finden, sodass diese Fläche minimal wird. Wodurch werden die auftretenden Konstanten festgelegt? Für den Fall dass Sie (i) nicht gelöst haben: die Rotationsfläche ist gegeben durch $A = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ (*3 Punkte*)

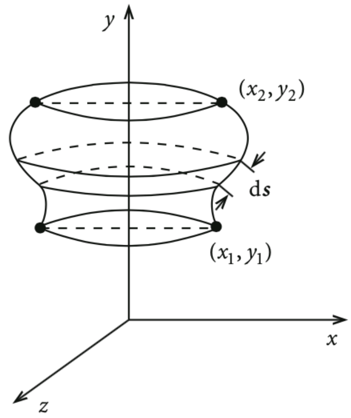

Abbildung 1: Zur Berechnung der Verbindungslinie zwischen zwei Punkten der Ebene, die bei Rotation um die y-Achse zu einer minimalen Mantelfläche führt (links).

Problem 2: Optimale Trajektorie (*10 Punkte*)

Welche Form muss die Bahn haben, auf der ein Körper reibungsfrei in kürzester Zeit von einem Punkt $A = (x_0, 0)$ zu einem Punkt $B = (x_2, y_2)$ gelangt, wenn er ausschließlich von der Schwerkraft angetrieben wird?

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und Gesamtlaufzeit für eine beliebige Strecke $y(x)$. (*2 Punkte*)

(b) Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1, um eine Differentialgleichung für y herzuleiten. (*3 Punkte*)

(c) Lösen Sie die DGL mithilfe der Substitution $y = 2r_0 \sin^2(\phi/2)$ und geben Sie die Parametrisierung $x = x(\phi)$ und $y = y(\phi)$ der gesuchten Kurve an. Um welche Form handelt es sich dabei? (*4 Punkte*)

(d) Wie gehen Sie vor, um noch unbekannte Konstanten mithilfe der Randbedingungen zu bestimmen? Berechnen Sie die Unbekannten für die Fälle

  (i) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = (1, 1)$, sowie (*0,5 Punkte*)

  (ii) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = (10, 1)$. (*0,5 Punkte*)

Problem 3: Geodäte auf einer Kugel (*10 Punkte*)

Eine Geodäte beschreibt die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte, wobei der Pfad auf einer gegebenen Oberfläche fixiert ist. Finden Sie die Geodäte auf einer Kugel.

(a) Geben Sie das infinitesimale Wegelement auf einer Kugel in Kugelkoordinaten an und finden Sie eine Integraldarstellung für die Entfernung zweier Punkte. (*3 Punkte*)

(b) Verwenden Sie die Euler-Lagrange Gleichung, um die Geodäte (in Kugelkoordinaten) zu finden. (*4 Punkte*)

Hinweis: Eine Substitution der Form $u = \cot(x)$ könnte hilfreich sein.

(c) Überführen Sie die in Teil b) gefundene Lösung in rechtwinklige kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass die Geodäte dem Pfad entlang des Schnittes der Kugeloberfläche und einer beide zu verbindenden Punkte enthaltende Ebene durch den Kugelmittelpunkt entspricht. (*3 Punkte*)

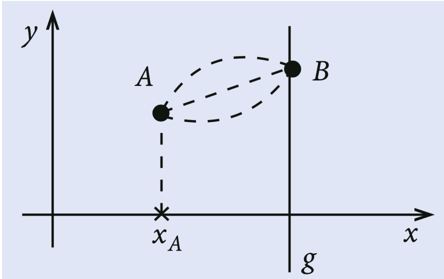

Abbildung 2: Anordnung zur Bestimmung des kürzesten Abstands zwischen dem Punkt A der xy-Ebene und einer Geraden.

Problem 4: Variationsrechnung (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung die kürzeste Verbingung zwischen einem gegebenen Punkt A der xy-Ebene und einer nicht durch A laufenden, zur y-Achse parallelen Geraden g (vgl. Abb. 2). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

i) Zeigen Sie, dass die kürzeste Verbindung zwischen A und einem festen Punkt B der Geraden g die Streke $\overline{AB}$ ist.

ii) Untersuchen Sie dann **alle** Strecken von A zu irgendwelchen Punkten auf g.