Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 5

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 24.05.2017**

Info: *Bitte schreiben Sie den Namen der Vorlesung sowie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt. Tackern Sie alle Blätter zusammen. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Problem 1: Bewegung auf Kegel (*10 Punkte*)

Betrachten Sie einen umgedrehten Kegel, dessen Symmetrieachse die z-Achse ist, mit halbem Öffnungswinkel α. Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss konstanter Gravitation auf diesem Kegel.

a) Beschreiben Sie die Zwangsbedingung, die das Teilchen auf der Kegeloberfläche hält. (*1 Punkt*)

b) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion für dieses System unter Benutzung der beschränkten Koordinaten. (*3 Punkte*)

c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. (*2 Punkte*)

d) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls in z-Richtung eine Erhaltungsgröße des Systems ist. (*2 Punkte*)

e) Ist die Hamiltonfunktion erhalten? (*2 Punkte*)

Problem 2: Bewegung auf Kegel, Teil 2 (*10 Punkte*)

Betrachten Sie den Kegel aus Problem 1. Dieser dreht sich nun allerdings mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse.

a) Beschreiben Sie die Zwangsbedingungen in diesem System. (*1 Punkt*)

b) Wie lautet die Lagrangefunktion für das System? (*4 Punkte*)

c) Geben Sie die Hamiltonfunktion an. (*3 Punkte*)

d) Entspricht die Hamiltonfunktion der Energie? Ist die Energie erhalten? (*2 Punkte*)

Problem 3: Zwei Massen an einem Seil (*10 Punkte*)

Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungslos auf einem Keil. Sie seine durch einen masselosen Faden der Länger $l = l_1 + l_2$ miteinander verbunden (vgl. Abb. 1)

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Von welchem Typ sind diese? Wie viele Freiheitsgrade s besitzt das System? (*2 Punkte*)

b) Wählen Sie passende generalisierte Koordinaten. Geben Sie die Transformationsformel an und formulieren Sie die Lagrangefunktion. (*3 Punkte*)

c) Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese. Bestimmen Sie $r_1(t)$ mit den Anfangsbedingungen: $r_1(t=0) = r_0$; $\dot{r}_1(t=0) = 0$. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingung auf. (*5 Punkte*)
Hinweis: Falls Sie b) nicht bearbeitet haben: Die Lagrangefunktion ergibt sich zu $L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + m_1 g q \sin\alpha + m_2 g(l-q)\sin\beta$*, wobei* q *die generalisierte Koordinate ist.*

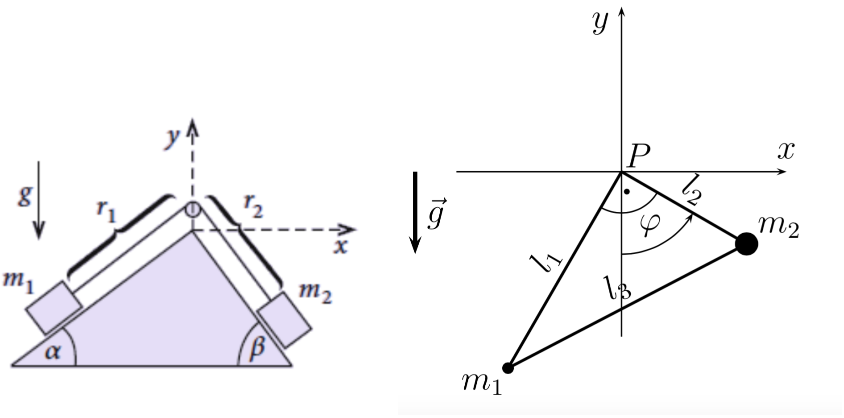

Abbildung 1: Anordnungen von Aufgabe 3 (links) und Aufgabe 4 (rechts).

Problem 4: Zwei Massen an starrer Stange (*10 Punkte*)

Gegeben ist eine Anordnung wie in Abb. 1 dargestellt, in der zwei Massen m_1 und m_2 mittels masseloser starrer Stangen mit Längen l_1 und l_2 mit einem Aufhängepunkt verbunden sind. Die beiden Massen sind über eine weitere starre masselose Stange der Länge $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ miteinander verbunden. Die Anordnung kann um den Aufhängepunkt P im Schwerefeld der Erde schwingen.

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen des Systems? (*2 Punkte*)

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung zweiter Art auf und finden Sie damit die Bewegungsgleichung die die Systemdynamik beschreibt. (*3 Punkte*)
Hinweis: Führen Sie die verallgemeinerte Koordinate φ ein

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspositionen und die Schwingungsfrequenz um die stabile Gleichgewichtslage (*5 Punkte*)
Hinweis: Eine Gleichgewichtsposition lieg vor, falls der Winkel φ die Bedinung $\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} = \tan\varphi$ erfüllt. Nutzen Sie diese Bedinungn um den/die Winkel φ_G der Gleichgewichtslage zu berechnen. Entwickeln Sie anschließend die Bewegungsgleichung um φ_G ($\varphi = \varphi_G + \delta$) bis $\mathcal{O}(\delta^2)$ um die entsprechende Schwingungsfrequenz zu ermitteln.