Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 31.05.2017**

***Info**: Bitte schreiben Sie den Namen der Vorlesung sowie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt. Tackern Sie alle Blätter zusammen. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Problem 1: Coulomb Potential und Noethertheorem (*10 Punkte*)

Betrachten Sie ein Teilchen im Potential

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{\mathbf{r}^2}.$$

(a) Zeigen Sie ausführlich, dass die Wirkung invariant unter der simultanen Transformation $\mathbf{r} \to \lambda \mathbf{r}$ und $t \to \lambda^2 t$ ist. (*5 Punkte*)

(b) Konstruieren Sie mithilfe des Noethertheorems die mit dieser Transformation verbundenen Erhaltungsgrößen. (*5 Punkte*)

Problem 2: Noether-Theorem: freier Fall im homogenen Schwerefeld (*10 Punkte*)

Ein Teilchen der Masse m und den Anfangsgeschwindigkeiten $v_x, v_y \neq 0$, $v_z = 0$ fällt frei im homogenen Schwerefeld.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten auf und bestimmen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. (*3 Punkte*)

(b) Finden Sie drei kontinuierliche Symmetrien des Systems und zeigen Sie explizit, dass die Lagrange-Funktion unter den zugehörigen einparametrigen Familien von kontinuierlichen Transformationen invariant bleibt. (*4 Punkte*)

(c) Benutzen Sie den Satz von Noether, um aus den Symmetrien drei Erhaltungsgrößen des Systems herzuleiten. (*3 Punkte*)

Problem 3: Die Gallileische Gruppe (*10 Punkte*)

In dieser Aufgabe werden wir beweisen, dass die Galileitransformationen Gruppeneigenschaften aufweisen. Betrachten Sie die allgemeine Galileitransformation, die auf den Koordinatenvektor $(\mathbf{r}, t)$ wie folgt wirkt:

$$G(\hat{R}, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v})(\mathbf{r}, t) = (\hat{R}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, t + t_0). \tag{1}$$

$\hat{R}$ ist eine orthogonale 3×3 Matrix, die die Koordinatenrotation beschreibt. $\mathbf{r}_0$ und t_0 sind Koordinaten- und Zeittranslationen und $\mathbf{v}$ ist die Geschwindigkeit des galiläischen Boost.

(a) Die Verkettung zweier solcher Transformationen berechnet sich zu $G_2 \circ G_1(\mathbf{r}, t) = G_2(G_1(\mathbf{r}, t))$. Beweisen Sie, dass

$$G_2(\hat{R}_2, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{v}_2) \circ G_1(\hat{R}_1, \mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{v}_1)(\mathbf{r}, t) = G_3(\hat{R}_3, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{v}_3)(\mathbf{r}, t), \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{R}_3 &= \hat{R}_2 \hat{R}_1 \\
\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2 + \hat{R}_2 \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_2 t_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 + \hat{R}_2 \mathbf{v}_1 \\
t_3 &= t_2 + t_1 .
\end{aligned}$$

Damit wird gezeigt, dass die Verkettung zweier Galileitransformationen ebenfalls eine Galileitransformation darstellt. (*3 Punkte*)

Hinweis: Sie dürfen Eigenschaften orthogonaler Matrizen ohne weiteren Beweis verwenden.

(b) Definieren Sie die identische Galileitransformation, die den Koordinatenvektor unverändert lässt. Ist diese Transformation eindeutig? (*1 Punkt*)

(c) Beweisen Sie, dass Galileitransformationen assoziativ sind, also dass $G_1 \circ (G_2 \circ G_3)(\mathbf{r}, t) = (G_1 \circ G_2) \circ G_3(\mathbf{r}, t)$. (*2 Punkte*)

(d) Zeigen Sie dass für jede Galileitransformation G_1 ein Inverses G_1^{-1} existiert, sodass $G_1 \circ G_1^{-1}(\mathbf{r}, t) = G_1^{-1} \circ G_1(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}, t)$. (*2 Punkte*)

(e) Sie haben nun gezeigt, dass Galileitransformationen eine Gruppe bilden. Handelt es sich um eine abelsche (kommutative) Gruppe? Dies ist der Fall, falls die Beziehung $G_1 \circ G_2(\mathbf{r}, t) = G_2 \circ G_1(\mathbf{r}, t)$ für Galileitransformationen gilt. (*2 Punkte*)

Problem 4: Verallgemeinertes Noether-Theorem (*10 Punkte*)

Gegeben sei ein konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen. Zudem existiere eine eindeutige Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &\longrightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q}, t, \alpha) \\
\mathbf{q}' &\longrightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha).
\end{aligned}$$

Dabei sei α ein kontinuierlicher Parameter, die Transformationsformeln seinen nach diesem stetig differenzierbar. Für $\alpha = 0$ handele es sich um die identische Transformation $\mathbf{q}'(\mathbf{q}, t, \alpha = 0) = \mathbf{q}$. Aus der Lagrange-Funktion wird durch Einsetzen der Transformationsformeln:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha), t) \equiv \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha).$$

Die Transformation sei nun so, dass die Lagrangefunktion invariant bleibt, d.h.

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t).$$

(a) Zeigen Sie, dass dann

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Bigg|_{\alpha=0}$$

ein Integral der Bewegung darstellt. (*5 Punkte*)

(b) Die Transformation sie nun so, dass sich die Lagrangefunktion wie folgt ändert

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{q}', t, \alpha).$$

Dabei kann $f(\mathbf{q}', t, \alpha)$ eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion sein. Zeigen Sie, dass dann

$$\hat{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{q}', t, \alpha) \Bigg|_{\alpha=0}$$

ein Integral der Bewegung darstellt. (*5 Punkte*)