Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017 **Abgabe 07.06.2017**

Problem 1: Zwei-Körper-Problem mit einer Feder (*15 Punkte*)

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2, deren Position durch die Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gegeben sind. Beide Massen sind untereinander mit einer masselosen Feder (Federkonstante k) verbunden. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{x}}_2^2 + \frac{1}{2} k \left(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| - d \right)^2 . \tag{1}$$

(a) Was wird durch den Abstand d beschrieben? (*1 Punkt*)

(b) Drücken Sie die Lagrangefunktion in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus. Nutzen Sie dazu die Transformation

$$\mathbf{X} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \tag{3}$$

wobei $\mathbf{X}$ die Schwerpunktbewegung beschreibt und $\mathbf{x}$ die Relativbewegung. Verwenden Sie die Definitionen $M = m_1 + m_2$ und $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, um Ihre Ergebnisse zu vereinfachen. (*2 Punkte*)

(c) Betrachten Sie nun ausschließlich die Schwerpunktbewegung. Was beschreibt die zugehörige Lagrangefunktion? (*2 Punkte*)

(d) Jetzt betrachten Sie ausschließlich die (interessantere) Relativbewegung. Schreiben Sie die entsprechende Lagrangefunktion der Relativbewegung $\mathbf{x}$ in sphärischen Koordinaten. (*1 Punkt*)

(e) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen, um die folgenden drei Bewegungsgleichungen für die Relativbewegung in Kugelkoordinaten zu erhalten: (*3 Punkte*)

$$\frac{d}{dt}[\dot{r}] = r\dot{\theta}^2 + r \sin^2\theta \; \dot{\phi}^2 + \frac{k}{m} (r - d) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}[r^2 \dot{\theta}] = r^2 \sin\theta \cos\theta \; \dot{\phi}^2 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}[r^2 \sin^2\theta \; \dot{\phi}] = 0 \tag{6}$$

(f) Reduzieren Sie die obigen Bewegungsgleichungen auf eine einzelne, deren Gestalt Sie an die Bewegungsgleichung im Keplerproblem erinnern sollte. Sie sollten während Ihrer Rechnung eine Integrationskonstante einführen, die dem Drehimpuls entspricht (*3 Punkte*)

(g) Berechnen Sie die Bahnkurve für $d = 0$. Ist diese geschlossen? (*3 Punkte*)

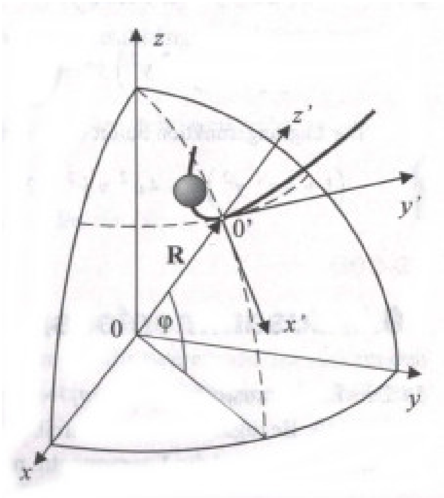

Abbildung 1: Das bewegte System (x', y', z') ist fest mit der Erde verbunden; x' zeigt nach Süden, y' nach Osten und z' nach oben.

Problem 2: Foucault-Pendel (*10 Punkte*)

Die Rotation der Erde lässt sich sehr überzeugend mit dem Foucault-Pendel beweisen. Das Foucault-Pendel hat eine schwere Masse (z.B. $m = 30\text{kg}$) und einen langen Pendelfaden (z.B. $l = 50\text{m}$). Seine Schwingungen können wegen der relativ großen Energie länger als 24h anhalten. Wir wollen nun berechnen, wie die Erdrotation die Schwingungsebene des Pendels langsam dreht. Sie verwenden x und y als generalisierte Koordinaten des Problems (siehe Abb. 1).

(a) Transformieren Sie mithilfe der Relation $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}$ in das rotierende Bezugssystem.

(b) Wie groß ist die potentielle Energie des Pendels? Geben Sie diese auch in der Näherung kleiner Ausschläge an.

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion an, wobei Sie Terme der Ordnung ω^2 vernachlässigen.

(d) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese ebenfalls unter der Annahme, dass Terme der Ordnung ω^2 vernachlässigt werden.

Hinweis: Es kann nützlich sein, in ein System zu wechseln, das mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \omega \sin(\varphi)$ zum erdfesten System x, y rotiert.

Problem 3: Erhaltungsgrößen von N-Teilchensystemen (*10 Punkte*)

Ein abgeschlossenes N-Teilchensystem have die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i<j} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \right).$$

Zeigen Sie, dass die Invarianz der Lagrangefunktion unter

(a) zeitlichen Translationen zur Energieerhaltung führt. (*2 Punkte*)

(b) Drehungen zur Impulserhaltung führt. (*3 Punkte*)

(c) räumlichen Translationen zur Impulserhaltung führt. (*2 Punkte*)

(d) reinen Galileitransformationen – Relativbewegungen mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ auf eine Erhaltungsgröße führt, die den Schwerpunktsatz kennzeichnet. (*3 Punkte*)