

# Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik

## Übungsblatt 8

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

Lukas Theis, M.Sc.

Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017

Abgabe 14.06.2017

### Aufgabe 1: Keplerproblem – LRL Vektor (27 Punkte)

Betrachten sie das Keplerproblem: Zwei Körper gehorchen der folgenden Gleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

wobei  $m$  die Masse,  $\mathbf{e}_r$  der Einheitsvektor  $\mathbf{r}/r$  und  $k$  eine Konstante ist, die die gegenseitige Wechselwirkung charakterisiert. Wir nehmen an wir wissen bereits, dass Energie  $E$  und Drehimpuls  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  erhalten sind. Wir untersuchen eine andere wichtige Erhaltungsgröße, erstmals entdeckt von Jakob Hermann und danach von Laplace, Runge und anderen. Dieser sogenannte Laplace-Runge-Lenz (LRL) Vektor hat verschiedene Anwendungen. So wurde er zum Beispiel von Pauli benutzt, um das Spektrum des Wasserstoffatoms herzuleiten.

Der LRL Vektor hat die Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m k \mathbf{e}_r.$$

1. Zeigen Sie mithilfe der Bewegungsgleichung, dass die drei Komponenten des Vektors erhalten sind. (3 Punkte)
2. Um die Bedeutung des Vektors zu verstehen, berechnen wir die Trajektorie.
  - (a) Führen Sie den Winkel  $\theta$  ein, sodass  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta$  gilt. Zeigen Sie damit, dass

$$r = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}{mk} \frac{1}{1 + \frac{A}{mk} \cos \theta}$$

gilt. (4 Punkte)

- (b) Die obige Trajektorie beschreibt eine Ellipse. Leiten Sie die physikalische Bedeutung von Betrag und Richtung des mit  $mk$  reskalierten LRL Vektors ab. (2 Punkte)
3. Typischerweise können Erhaltungsgrößen aus Systemsymmetrien abgeleitet werden. In diesem Fall ist eine Symmetrie nicht direkt ersichtlich, insbesondere da wir eine weitere Dimension einführen müssen, um die Symmetrie zu erkennen.
    - (a) Schreiben Sie zuerst die Gleichung der Energieerhaltung für dieses System nieder. (2 Punkte)
    - (b) Wir führen eine neue Zeitvariable  $s$  ein, die in folgender Relation zur alten steht:

$$\frac{dt}{ds} = r$$

Schreiben sie mithilfe dieser Relation die Gleichung zur Energieerhaltung so um, dass sie nur noch von den Ableitungen von  $\mathbf{r}$  und  $t$  nach  $s$  abhängt. (3 Punkte)

- (c) Betrachten Sie den Fall negativer Energie. Finden Sie eine Variablentransformation der Zeit  $\tau = f(t)$  und zeigen sie damit, dass die Energieerhaltung folgende Form annehmen kann:

$$\left( \frac{d\tau}{ds} - T \right)^2 + \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|^2 = R^2,$$

mit zu bestimmenden Konstanten  $T$  und  $R$ . (3 Punkte)

(d) Welche Oberfläche beschreibt diese Gleichung ? (1 Punkt)

(e) Betrachten Sie die erweiterte Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\tau}{ds} - 1\right)\mathbf{e}_t + \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

wobei  $\mathbf{e}_t$  den Einheitsvektor der vierten Dimension bezeichnet. Ab jetzt betrachten wir außerdem die normierten Gleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \quad \text{und} \quad \left(\frac{dt}{ds} - 1\right)^2 + |\mathbf{r}'|^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit einer harmonischen Dynamik folgt. (4 Punkte)

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{ds^2} + \mathbf{v} = 0$$

(f) Eine solche Dynamik ist rotationsinvariant. Dies bedeutet, dass das zugehörige Drehmoment

$$\mathbf{L}_4 = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}$$

erhalten ist. Zeigen Sie, dass sich dieses vierdimensionale Drehmoment wie folgt zerlegen lässt: (2 Punkte)

$$\mathbf{L}_4 = \mathbf{C}_1 - \mathbf{e}_t \times \mathbf{C}_2$$

mit

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{r}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{r}((r-1)\mathbf{r} + \frac{dr}{ds}\mathbf{r})$$

(g) Zeigen Sie, dass  $\mathbf{C}_1$  proportional zum üblichen dreidimensionalen Drehmoment ist. (2 Punkte)

(h) Was bedeutet dies für die Dynamik von  $\mathbf{C}_2$  ? (1 Punkt)

## Problem 2: Sphärisches Oszillatorpotential (13 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich im Oszillatorpotential

$$U(r) = \alpha r^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \mu\omega^2/2 > 0.$$

(a) Diskutieren Sie die Bewegung zunächst anhand einer Skizze des effektiven Potentials. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Bahnkurven  $\rho = \rho(\varphi)$ . Welche Form haben die Bahnkurven? (4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie  $\rho_{\min}$  und  $\rho_{\max}$  und skizzieren Sie eine Bahnkurve. (2 Punkte)

(d) Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit der Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r)$$

in kartesischen Koordinaten. (4 Punkte)

## Problem 3: Streuung (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  für das abstoßende Potenzial  $U(r) = \alpha/r^2$  mit  $\alpha > 0$ . (6 Punkte)

(b) Existiert der totale Streuquerschnitt  $\sigma$ ? Warum oder warum nicht? (4 Punkte)