Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Lukas Theis, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

SS 2017 **Abgabe 21.06.2017**

Aufgabe 1: Homogener Quader (*10 Punkte*)

Betrachten Sie einen Quader mit konstanter Massendichte ρ_0 und Seitenlängen a, b und c. Er rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\omega|$ um eine Achse, die mit einer Raumdiagonalen des Quaders zusammenfällt.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an, die alle relevanten Größen und Orientierungen enthält. (*1 Punkt*)

(b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente Θ_i des Quaders. (*4 Punkte*)

Hinweis: Nimmt man an, dass anstelle von Massenpunkten eine kontinuierliche Massedichte $\rho(\mathbf{r})$ vorliegt, so geht die Summe bei der Berechnung des Trägheitstensors in ein Integral über, d.h. $\Theta_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 \delta_{ik} - x_i^\nu x_k^\nu \longrightarrow \Theta_{ik} = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}) r^2 \delta_{ik} - x_i x_k$

(c) Wie groß ist das Trägheitsmoment Θ_0 bezüglich der Achse, um die der Quader rotiert? (*3 Punkte*)

(d) Drücken Sie die kinetische Energie der Rotation einmal durch die Θ_i und einmal durch Θ_0 aus. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Symmetrischer Kreisel (*10 Punkte*)

Auf einen symmetrischen Kreisel wirkt das Drehmoment $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\omega(0) = 0$ und $\mathbf{e}_3(0) = \mathbf{e}_z$. Geben Sie die Zeitabhängigkeit der Eulerwinkel an. (*10 Punkte*)

Aufgabe 3: Trägheitstensor (*10 Punkte*)

(a) Ein starrer Körper besitze den Trägheitstensor $\Theta = (\Theta_{ik})$, wobei sich dieser auf ein körperfestes Koordinatensystem Σ bezieht, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Wie ändert sich der Trägheitstensor für ein Koordinatensystem Σ', das bei parallelen Achsen um den Vektor $\mathbf{a}$ gegenüber Σ verschoben ist (verallgemeinerter Steiner'scher Satz)?

(b) Zeigen Sie, dass sich der Trägheitstensor bei einer Drehung des körperfesten Koordinatensystems wie folgt transformiert:

$$(\Theta'_{nm}) = \sum_{ik} d_{ni} d_{mk} \Theta_{ik}$$

Dabei sind d_{ik} die Elemente der orthogonalen Drehmatrix.