# Theoretische Physik I

**SS 2015** **08.07.2015**
**Blatt 12** **Fälligkeitsdatum 15.07.2015**

## Problem 1: Lineare Kette mit 3 Teilchen

Wir betrachten 3 Teilchen mit derselben Masse $m$, die mit masselosen Federn verbunden sind (alle mit gleicher Federkonstante $k$). Wie in Abb. 1 dargestellt sind die Federn mit den Enden fest verbunden. Zur Beschreibung verwenden wir die Koordinaten $x_i(t)$, die den Unterschied

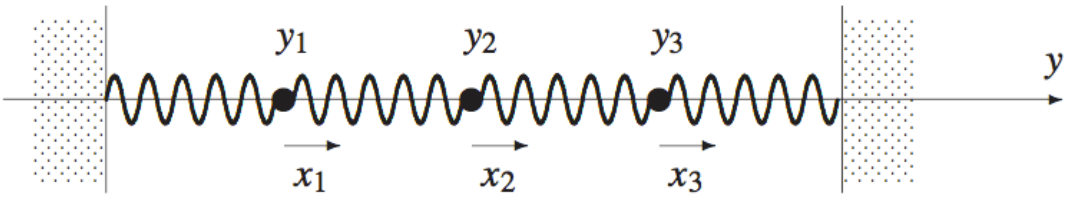


Abbildung 1: Drei-Teilchen-System mit geschlossenen Randbedingungen.

zwischen der tatsächlischen Poition des i-ten Teilschens $y_i(t)$ und seiner Gleichgewichtslage $y_{i0}$ bezeichnen, also gilt: $x_i(t) = y_i(t) - y_{i0}$. Die Lagrangefunktion des Systems ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{k}{2}\left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2\right] \tag{1}$$

(a) Was beschreiben die Terme $-\frac{k}{2}x_1^2$ und $-\frac{k}{2}x_3^2$, die in der Lagrangefunktion auftauchen?
(1 Point)

(b) Die Lagrangefunktion kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j\right). \tag{2}$$

Wie sehen die zugehörigen Matrizen $T$ und $V$ aus?
(2 Points)

(c) Berechnen Sie die Frequenz der drei Eigenmoden des Systems.
(6 Points)

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.
(6 Points)

(e) Skizzieren Sie für jede Eigenmode ein einfaches Diagram, welches die zugehörige Bewegung beschreibt.
(3 Points)

## Problem 2: Lineare Kette mit $N$ Teilchen

Betrachten Sie nun N Teilchen gleicher Masse, die durch masselose Federn miteinander verbunden sind. Wie in Problem 1 liegen wieder geschlossenen Randbedingungen vor. Zur Analyse des Systems werden wieder die Koordinaten $x_i(t)$ verwendet, die analog zu Problem 1 definiert werden: $x_i(t) = y_i(t) - y_{i0}$.

(a) Wie sieht die Lagrangefunktion des Systems aus?
(*Hinweis: Es ist die N-Teilchen Verallgemeinerung der Lagrangefunktion aus Problem 1.*)
(2 Points)

(b) Die Lagrangefunktion kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_ix_j\right). \tag{3}$$

Wie sehen die Matrizen $T$ und $V$ aus?
(2 Points)

(c) Betrachten Sie die $N$ Teilchen Determinante $D_N = \det\left(V - \omega^2 T\right)$. Wie lautet die rekursive Formel zur Berechnung von $D_N$ in Abhängigkeit von $D_{N-1}$ und $D_{N-2}$?
(*Hint: Benutzen Sie die wohlbekannte mathematische Formel zur rekursiven Berechnung der Determinante einer $N \times N$ Matrix und nutzen Sie dabei die einfache Form der Matrix $V - \omega^2 T$ aus.*)
(4 Points)

(d) Wandeln Sie die Determinantenformel aus Teil (c) mittels des Ansatzes $D_N = \beta^N$ in eine quadratische Gleichung für $\beta$ um, die folgende Form besitzt:

$$\beta^2 - \left(2k - m\omega^2\right)\beta + k^2 = 0 \tag{4}$$

(2 Points)

(e) Die quadratische Gleichung aus (d) hat zwei Lösungen, $\beta_1$ und $\beta_2$. Zeigen Sie, dass die Lösungen folgende Relationenen erfüllen:

$$\beta_1 + \beta_2 = 2k - m\omega^2 \tag{5}$$

$$\beta_1\beta_2 = k^2 \tag{6}$$

(2 Points)

(f) Die allgemeine Lösung für $D_N$ ist gegeben durch $D_N = c_1\beta_1 + c_2\beta_2$. Benutzen Sie, dass gilt $D_0 = 1$ und $D_1 = 2k - m\omega^2$, um die Konstanten $c_1$ und $c_2$ zu finden.
(2 Points)

(g) Zeigen Sie dass die Lösung der Gleichung $D_N = 0$ für $N > 1$ gegeben ist durch:

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{N+1} = 1 \tag{7}$$

und erklären Sie warum dies folgende Relation impliziert:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \exp\left(\frac{2i\nu\pi}{N+1}\right), \tag{8}$$

wobei $\nu = 1, 2, ..., N$ die verschiedenen Normalmoden indizieren.
(2 Points)

(h) Verwenden Sie die Gleichungen (5), (6), und (8) um zu zeigen, dass die Normalmodenfrequenzen $\omega_\nu$ gegeben sind durch:

$$\omega_\nu = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{\nu\pi}{2(N+1)}\right)\right|. \tag{9}$$

(3 Points)

(i) Die Komponenten der zugehörigen Eigenvektoren $A^{(\nu)}$ sind gegeben durch:

$$A_n^{(\nu)} = \sqrt{\frac{2}{m(N+1)}}\sin\left(\frac{n\nu\pi}{N+1}\right). \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren $A^{(\nu)}$ folgende Gleichung erfüllen: $\left(V - \omega_\nu^2 T\right)A^{(\nu)} = 0$.
(3 Points)