# TP1a: Rechenmethoden der Mechanik
## Lösung Beispielaufgaben 3

**Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch**
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

**WS 2016/2017**

# Spatprodukt

(a)
$$S(y) = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ y \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y+2 \\ -1-3y \\ -4 \end{pmatrix} = (2y+2) + 0 - 8 = 2y - 6$$

(b)
$$\mathbf{0} = a^1\mathbf{v}_1 + a^2\mathbf{v}_2 + a^3\mathbf{v}_3 = a^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a^3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad a^j \in \mathbb{R}.$$

Diese Vektorgleichung liefert ein System von drei Gleichungen, das wir wie folgt lösen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $1a^1 + 3a^2 - 1a^3 = 0$ | $\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$ | (iv) | $a^3 = a^2$ |
| (ii) | $0a^1 + 2a^2 - 2a^3 = 0$ | $\overset{\text{(iv) in (i)}}{\Rightarrow}$ | (v) | $a^1 = -2a^2$ |
| (iii) | $2a^1 + 1a^2 + ya^3 = 0$ | $\overset{\text{(iv),(v) in (iii)}}{\Rightarrow}$ | (vi) | $a^2(-4+1+y) = 0$ |

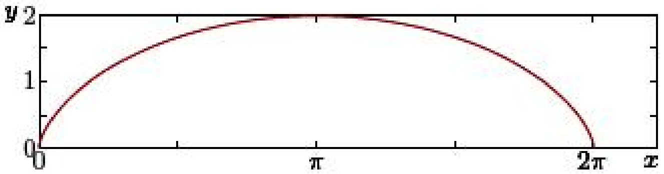
(ii) liefert (iv): $a^3 = a^2$. (iv) in (i) eingesetzt liefert (v): $a^1 = -2a^2$. (iv) und (v) in (iii) eingesetzt liefern (vi): $a^2(y-3) = 0$. Für $y \neq 3$ folgt $0 \overset{\text{(vi)}}{=} a^2 \overset{\text{(v)}}{=} a^1 \overset{\text{(iv)}}{=} a^3$, also sind die Vektoren dann linear unabhängig. Für $\boxed{y = 3}$ liefert (vi) jedoch $0 = 0$, legt also nicht den Wert von $a^2$ fest. Somit existieren dann unendlich viele nicht-triviale Lösungen (eine für jeden Wert von $a^2 \in \mathbb{R}$), also sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ dann linear abhängig.

(c) Für $y = 3$ ist $S(3) \overset{\text{(a)}}{=} 2 \cdot 3 - 6 = \boxed{0}$, also verschwindet das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Folglich liegen sie alle in derselben Ebene in in $\mathbb{R}^3$ und sind somit linear abhängig, wie in (b) gefunden.

*Anmerkung:* Dieses Beispiel illustriert folgende allgemeine Tatsache: drei Vektorn in $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig wenn, und nur wenn, ihr Spatprodukt verschwindet.

## Natürliche Parametrisierung einer Kurve

(c)




(b) $\mathbf{r}(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t\right)^T, \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \left(1 - \cos t, \sin t\right)^T$

$||\dot{\mathbf{r}}(t)|| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{1 - 2\cos t + 1} = 2|\sin(t/2)| \quad [\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A]$

Für $t \leq 2\pi$ ist $\sin(t/2) \geq 0$, also können die Bestragstriche weggelassen werden.

$$s(t) = \int_0^t \mathrm{d}u\, ||\dot{\mathbf{r}}(u)|| = \int_0^t \mathrm{d}u\, 2\sin(u/2) = -4\cos(u/2)\Big|_0^t = \boxed{4 - 4\cos(t/2)}$$

(c) $t(s) = 2\arccos(1 - s/4) = 2\arccos\tilde{s}$, mit $\tilde{s} = 1 - s/4$ [Umkehrfunktion von (b)]

$$\mathbf{r}_L(s) = \boxed{\left(2\arccos\tilde{s} - \sin\left[2\arccos\tilde{s}\right], 1 - \cos\left[2\arccos\tilde{s}\right]\right)^T}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\arccos\tilde{s} - 2\sin(\arccos\tilde{s})\cos(\arccos\tilde{s}) \\ 1 - \cos^2(\arccos\tilde{s}) + \sin^2(\arccos\tilde{s}) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2\arccos(1 - s/4)\tilde{s} - 2\sqrt{1 - \tilde{s}^2}\tilde{s} \\ 1 - \tilde{s}^2 + 1 - \tilde{s}^2 \end{pmatrix}}$$

**Lösung Beispielaufgabe 7: Linienintegral: Bergwanderung [3]**

Strategie für Linienintegrale, $\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_I \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$: zunächst eine Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ des Weges $\gamma$ festlegen, dann $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ und $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ berechnen, am Ende integrieren.

Gegeben: $\mathbf{r}_0 \equiv (0,0)^T$, $\mathbf{r}_1 \equiv (3, 3a)^T$, $\mathbf{r}_2 \equiv (2, 4a)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_w = (-y^2, -10)^T$.
Wanderer 1: Weg $\gamma_1$ ist eine Gerade von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_1$, hat also die Form $y(x) = ax$. Eine mögliche Parametrisierung, mit $t = x \in [0,3]$ als Kurvenparameter, ist somit:

$\gamma_1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= (x(t), y(x))^T = (t, at)^T \\
\dot{\mathbf{r}}(t) &= (1, a)^T, \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \left(-y^2(t), -10\right)^T = (-a^2, -10)^T \\
\left[\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\right]_{\gamma_1} &= -(a^2 + 10a) \\
W[\gamma_1] = -\int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} &= \int_0^3 \mathrm{d}t\left[a^2t^2 + 10a\right] = \left[\tfrac{1}{3}a^2t^3 + 10at\right]_0^3 = \boxed{9a^2 + 30a}.
\end{aligned}$$

Wanderer 2: Der Weg $\gamma_2$ ist eine Parabel mit Scheitelpunkt $\mathbf{r}_2 = (2, 4a)^T$, hat also die Form $y(x) = -k(x-2)^2 + 4a$. Einsetzen von $\mathbf{r}_0 = (0,0)^T$ oder $\mathbf{r}_1 = (3, 3a)^T$ liefert die Krümmung, $k = a$. Eine mögliche Parametrisierung, mit $t = x \in [0,3]$ als Kurvenparameter, ist somit:

$\gamma_2$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= (x(t), y(x))^T = (t, -a(t-2)^2 + 4a)^T \\
\dot{\mathbf{r}}(t) &= (1, -2a(t-2))^T, \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \left(-y^2(t), -10\right)^T = (-[-a(t-2)^2 + 4a]^2, -10)^T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\right]_{\gamma_1} &= -[-a(t-2)^2+4a]^2+20a(t-2)\\
W[\gamma_2] = -\int_{\gamma_2}\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} &= \int_0^3 \mathrm{d}t\,\Big[[-a(t-2)^2+4a]^2-20a(t-2)\Big]\\
&= \int_0^3 \mathrm{d}t\,\Big[a^2(t-2)^4-8a^2(t-2)^2+16a^2-20at+40a\Big]\\
&= \Big[\tfrac{1}{5}a^2(t-2)^5-\tfrac{8}{3}a^2(t-2)^3-10at^2+(16a^2+40a)t\Big]_0^3\\
&= \left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{8}{3}+48+\tfrac{32}{5}-\tfrac{64}{3}\right)a^2+(-90+120)\,a = \boxed{\tfrac{153}{5}a^2+30a}.
\end{aligned}
$$