

Theoretische Physik Ib: Klassische Mechanik, SS  
17

Frank Wilhelm-Mauch

16. Mai 2017

Fachrichtung Physik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Newtonsche Punktmechanik</b>	<b>7</b>
1.1	Bahnkurven und Koordinatensysteme . . . . .	7
1.1.1	Kartesische Koordinaten . . . . .	7
1.1.2	Kugelkoordinaten . . . . .	8
1.1.3	Andere krummlinige Koordinatensysteme . . . . .	10
1.2	Die Newtonschen Axiome . . . . .	10
1.2.1	Inertialsystem . . . . .	10
1.2.2	Newtonsche Bewegungsgleichung . . . . .	11
1.2.3	Reaktionsprinzip . . . . .	11
1.2.4	Weitere Annahmen . . . . .	11
1.3	Mathematische Struktur der Newtonschen Bewegungsgleichungen	12
1.3.1	Eindimensionale Bewegung für einen Massenpunkt . . . . .	12
1.3.2	Dreidimensionale Bewegung . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Lagrangeformalismus</b>	<b>18</b>
2.1	Mathematischer Einschub: Extremalisierung und Variationsrechnung . . . . .	18
2.1.1	Kurvendiskussion in einer Dimension . . . . .	18
2.1.2	Extremwerte von Skalarfeldern . . . . .	18
2.1.3	Extremwerte mit Nebenbedingungen . . . . .	19
2.1.4	Variationsrechnung ohne Nebenbedingungen . . . . .	21
2.1.5	Variation mit isoperimetrischer Nebenbedingung . . . . .	24
2.1.6	Variation mit holonomer Nebenbedingung . . . . .	26
2.2	Das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	27
2.2.1	Kernaussage . . . . .	27
2.2.2	Die Lagrangefunktion . . . . .	28
2.3	Symmetrien und Erhaltungsgrößen . . . . .	29
2.3.1	Zyklische Koordinaten . . . . .	29
2.3.1.1	Rotationssymmetrie . . . . .	29
2.3.1.2	Zwei freie wechselwirkende Teilchen . . . . .	30
2.3.2	Zyklischer Parameter: Zeitunabhängigkeit . . . . .	31
2.3.3	Das Noethertheorem . . . . .	32
2.4	Globale Symmetrien und Gallileiinvarianz . . . . .	33
2.4.1	Homogenität der Zeit . . . . .	35

2.4.2	Homogenität des Raumes . . . . .	35
2.4.3	Isotropie des Raumes . . . . .	36
2.4.4	Relativität der Raumzeit . . . . .	36
2.5	Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	37
2.5.1	Ein einfaches Beispiel . . . . .	37
2.5.2	Linear beschleunigtes Bezugssystem . . . . .	37
2.5.3	Rotierendes Bezugssystem . . . . .	38
2.6	Lagrangeformalismus mit Zwangsbedingungen . . . . .	39
2.6.1	Euler-Lagrange-Gleichungen mit Zwangskraft . . . . .	39
2.6.2	Freier Fall auf einem Zylinder . . . . .	39
2.6.2.1	Behandlung durch Eliminierung von Koordinaten . . . . .	39
2.6.2.2	Behandlung mit Lagrangemultiplikatoren . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Zweikörperproblem und Zentralkräfte</b>	<b>41</b>
3.1	Reduktion auf ein Einteilchenproblem . . . . .	41
3.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	42
3.3	Das Keplerproblem . . . . .	43
3.3.1	Steulösung: Hyperbel . . . . .	44
3.3.2	Grenzfall Parabel . . . . .	44
3.3.3	Minimale Energie: Kreis . . . . .	44
3.3.4	Gebundene Kurve: Ellipse . . . . .	44
3.4	Klassische Streuung . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Starrer Körper</b>	<b>51</b>
4.1	Zwangsbedingungen und Normalkoordinaten . . . . .	51
4.2	Kinetische Energie und Drehimpuls eines starren Körpers . . . . .	54
4.3	Vektoren und Tensoren . . . . .	55
4.4	Eulersche Bewegungsgleichungen und Stabilität des kräftefreien Kreisels . . . . .	57
4.4.1	Stabilität des asymmetrischen kräftefreien Kreisels . . . . .	58
4.4.2	Nutation des symmetrischen kräftefreien Kreisels . . . . .	58
4.5	Präzession und Nutation des schweren symmetrischen Kreisels . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Kleine Schwingungen</b>	<b>62</b>
5.1	Wiederholung: Eindimensionaler freier Harmonischer Oszillator . . . . .	62
5.2	Mehrdimensionale Stabilität und gekoppelte Oszillatoren . . . . .	63
5.3	Beispiele für gekoppelte Oszillatoren . . . . .	65
5.3.1	Doppelpendel . . . . .	65
5.3.2	Lineare Kette . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Hamiltonformalismus</b>	<b>69</b>
6.1	Hamiltonfunktion und kanonische Gleichungen . . . . .	69
6.2	Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen in einem externen elektromagnetischen Feld . . . . .	71
6.3	Phasenraumdarstellung . . . . .	72
6.4	Kanonische Transformationen . . . . .	72

6.4.1	Beispiel: Kanonische Transformation für den harmonischen Oszillator . . . . .	74
6.4.2	Hamilton-Jacobi-Theorie . . . . .	75
6.4.2.1	Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Kontiuumsmechanik</b>	<b>78</b>
7.1	Balkenbiegung . . . . .	78
7.2	Saitenschwingung . . . . .	80
7.2.1	Eindimensionale Wellengleichung und Variation für Felder	80
7.2.2	Verallgemeinerungen . . . . .	81
7.2.3	Lösungsstrategien . . . . .	82
7.3	Elemente der Hydrodynamik . . . . .	83
7.3.1	Kontinuumslimes . . . . .	84
7.3.2	Hydrostatik . . . . .	85
7.3.3	Fließgleichgewichte . . . . .	86
7.3.4	Bernoullieffekt . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Stabilität und dynamische Systeme</b>	<b>88</b>

# Vorbemerkungen

Dieses Skript dient zum Verfolgen der Vorlesung Theoretische Physik Ib: Klassische Mechanik an der Universität des Saarlandes. Es ersetzt weder die Vorlesung noch die vielen exzellenten Bücher auf dem Gebiet. Da es parallel zur Vorlesung erstellt wird erfolgt die Benutzung auf eigene Gefahr. In der Vorlesung werden zu verschiedenen Punkten grafische Darstellungen genutzt, die nicht im Skript enthalten sind - sie erscheinen dann in der zweiten Auflage.

Wie es in den meisten Studienplänen üblich ist, folgt die theoretische Mechanik im Semester nach der Behandlung der klassischen Mechanik in der Experimentalphysik. Sie lernen, die vielen Phänomene und Konzepte der Mechanik auf ein knappes aber recht abstraktes mathematisches Gerüst zu reduzieren und die dahinter stehenden Annahmen klar herauszuarbeiten. Neben dieser Eleganz - aufgrund ihrer konzeptionellen Einfachheit ist die klassische Mechanik sicherlich die mathematisch rigoroseste und eleganteste Vorlesung im Theoriekanon - liefert Ihnen diese Herangehensweise auch sehr effektive Rechentechniken zur Lösung mechanischer Probleme. Die hier entwickelten Methoden der *Langran-geschen Mechanik* einschließlich des Hamiltonformalismus formulieren dann die Mechanik auch gleich so, dass sie den Übergang zur Quantenmechanik und zur statistischen Physik erleichtern. Unter anderem werden wir hier folgende Fragen angehen

- was sind die minimalen Annahmen hinter den Newtonschen Axiomen
- Wie kann ich die Vektorgeometrie in mechanischen Aufgaben vereinfachen, insbesondere bei Bewegungen unter Zwangsbedingungen?
- Wann ist welche Größe erhalten? Kennen wir schon alle Erhaltungssätze?
- Was kann ich über die Mechanik von Systemen noch sagen, deren Bewegungsgleichungen nicht mehr lösbar sind?
- Warum reitet man so darauf herum, neben der Geschwindigkeit auch noch den Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  einzuführen?
- Die Bewegungsgleichungen für Impuls  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$  und Drehimpuls  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  sehen analog aus - was kann ich daraus lernen?
- Wie genau funktionieren Planetenbewegung, gekoppelte Oszillatoren, starre Körper?

Außerdem lernen Sie die Arbeitsweise der theoretischen Physik. Diese bedient sich der Mathematik in hohem Maße, ist aber eben nicht das Gleiche. Insbesondere ist es für die Denkweise der Theorie typisch, Symmetrie und dimensionslose kleine Parameter auszunutzen, auch davon erhalten Sie hier ein Kostprobe.

Die Hochschuldidaktik der Naturwissenschaften legt nahe, den wichtigsten Lerninhalt der Vorlesung möglichst rasch einzuführen. Wenn Ihnen also unser Einstieg, der sehr schnell zum Lagrangeformalismus kommt, zunächst etwas steil finden, dann hoffe ich, dass Sie zum Ende des Semesters mit gefestigten Kenntnissen dies zu schätzen wissen. Und wie immer in der Theorie ist die Vorlesung nicht einmal die halbe Miete: Verständnis für die Techniken und Konzepte der Mechanik entsteht erst durch reichhaltige Übung und Eigentätigkeit.

*Vorwort wird am Schluss noch vervollständigt.*

# Kapitel 1

## Newton'sche Punktmechanik

Der Großteil der theoretischen Mechanik beschäftigt sich mit Systemen von Massenpunkten. Starre Körper und Kontinua werden aus der Punktmechanik heraus entwickelt.

### 1.1 Bahnkurven und Koordinatensysteme

Wir beschreiben zunächst einen einzelnen Massenpunkt mit Masse  $m$ . Seine Bahnkurve wird durch eine Vektorwertige Funktion der Zeit  $\vec{r}(t)$  beschrieben. Ziel der Mechanik ist es, für eine gegebene Fragestellung  $\vec{r}(t)$  zu berechnen. Damit ergibt sich, dass  $\vec{r}$  die (*dynamischen*) *Variablen* und  $t$  der *Parameter* der Theorie ist. Physikalisch ist  $\vec{r}(t)$  eine Abfolge von Orten. Der Ort ist eine reale physikalische Eigenschaft und wird beschrieben durch einen abstrakten Vektor.

Um rechnen zu können ist es rasch notwendig, die Ort und Bahnkurve durch ein Koordinatensystem zu beschreiben, also eine Basis des Vektorraumes (genauer: des affinen Raumes) zu finden, in dem wir arbeiten.

#### 1.1.1 Kartesische Koordinaten

Die naheliegendste Wahl ist ein *kartesisches Koordinatensystem*. Dazu wählen wir einen Koordinatenursprung  $O$  legen wir drei Basisvektoren  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  fest. Diese wählen wir orthonormiert

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.1)$$

und als Rechtssystem, d.h.

$$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z.$$

In diesen Koordinaten können wir die Bahnkurve schreiben als

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z. \quad (1.2)$$



Wie Sie schon oben sehen, verwenden wir für Summationen und ähnliches wo eine praktikable Indexmenge gefragt ist

$$x \equiv r_1 \quad y \equiv r_2 \quad z \equiv r_3.$$

Es ist viel praktischer, diese Beziehungen durch Spaltenvektoren auszudrücken. Die Darstellung der Basisvektoren ist

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

und die Bahnkurve ist entsprechend

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Wir können das Koordinatensystem durch *Koordinatenlinien* beschreiben, also Linien, entlang derer zwei der Koordinaten konstant sind. Das sind hier Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Außerdem ist es nützlich, von Koordinatenflächen zu sprechen, also Flächen, auf denen eine der Koordinate konstant ist. Es ist dann z.B.  $z = \text{const.}$  parallel zur  $xy$ -Ebene usw. Da das Koordinatensystem orthogonal ist, Gl. (1.1), steht diese Ebene automatisch senkrecht auf  $\hat{e}_z$ . Diese einfache Struktur aus Geraden / Ebenen kommt daher, dass die Koordinaten-Einheitsvektoren selber nicht vom Ort abhängen, Gl. (1.3).

Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich für gegebenes  $\vec{r}(t)$  ebenfalls durch die Koordinatenfunktionen darstellen. Dazu differenzieren wir (1.2) unter Nutzung von (1.3) und schreiben es wieder wie (1.4)

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

### 1.1.2 Kugelkoordinaten

Das wichtigste Beispiel für krummlinige (=nicht-kartesische) Koordinaten sind Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ . Diese rechnen sich in kartesische Koordinaten um in der Form

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Auch hier können wir Koordinateneinheitsvektoren definieren. Diese geben die Richtung an, in der sich  $\vec{r}$  verändert, wenn eine Koordinate verändert und die anderen festgehalten werden. Bis auf Normierung haben wir also

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad \hat{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad \hat{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}. \quad (1.5)$$

Diese Differenziationen ergeben

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können uns leicht überzeugen, dass auch diese Vektoren orthonormiert sind. Ebenso gelingt uns der Nachweis dass sie ein rechtshändiges Dreibein bilden

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos^2 \phi + \cos \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix} = \hat{e}_r. \end{aligned}$$

Hier hängen jetzt die Einheitsvektoren vom Ort ab. So wird eine Bahnkurve durch die Angabe der Funktionen  $(r(t), \theta(t), \phi(t))$  beschrieben, vektoriell ist sie aber damit denkbar einfach  $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r(t)$ . Damit ergibt sich als Geschwindigkeit, unter Anwendung der Produktregel und Ausnutzung von Gl. 1.5

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} = \quad (1.6)$$

$$= \dot{r}\hat{e}_r + \dot{\theta}r\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi. \quad (1.7)$$

Durch nochmaliges Differenzieren erhält man einen Ausdruck für die Beschleunigung (Übung), auf den wir später bei Kreisbewegungen noch besser eingehen wollen. Wichtig in der Mechanik ist die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2).$$

Der letzte Ausdruck ergibt sich aus 1.6 unter Ausnutzung der Orthonormiertheit unserer Basisvektoren.

Die Ortsabhängigkeit der Einheitsvektoren hat eine Auswirkung auf die Koordinatenlinien und -flächen: Die radiale Koordinatenlinien sind die vom Ursprung ausgehenden Strahlen, die polaren (die unter Variation des *Polarwinkels*  $\theta$  entstehen) sind Längengrade und die Azimuthalen (Variation von  $\phi$ ) sind Breitenkreise. Damit klärt sich auch die Bedeutung des Vorfaktors vor  $\hat{e}_\phi$  in 1.6 : Er gibt den Radius eines Breitenkreises an. Die Koordinatenflächen sind in Kugelkoordinaten nicht sehr bedeutend, können aber natürlich konstruiert werden.

Ein solches Koordinatensystem nennen wir *krummlinig*.

### 1.1.3 Andere krummlinige Koordinatensysteme

In sehr vielen Fällen sind auch Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  nützlich, mit der Umrechnung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}$$

und den Einheitsvektoren

$$\hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie Orts- und Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \quad \vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

und kinetischer Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

Der Nutzen solcher Koordinatensysteme ist in der Analyse von mechanischen Systemen mit einer Symmetrie oder einer Zwangsbedingung, die diesen Koordinaten gut angepasst ist, was wir später systematisch untersuchen werden. Manchmal sind das auch andere Koordinatensysteme - hyperbolische, parabolische usw.

## 1.2 Die Newtonschen Axiome

Für eine (mathematische) Theorie sind *Axiome* die nicht weiter hinterfragten Grundannahmen. Dies können in einfachen Theorien einfach experimentelle Beobachtungen sein, in komplexen und mächtigen Theorien ist eine starke Axiomatik aber eher ein Satz recht abstrakter minimaler Grundannahmen, aus denen die Aussagen der Theorie dann mathematisch-logisch geschlossen werden. Dies ist eine der wesentlichen intellektuellen Leistungen der theoretischen Physik: Die Benennung minimaler Prinzipien, die hinter den Naturgesetzen stehen. Ein Ergebnis ist „richtig“ im Sinne der Theorie, wenn die Schlusskette aus den Grundannahmen stimmt. Allerdings steht über allem die Beobachtung: Wenn ein solches „richtiges“ Ergebnis der Beobachtung widerspricht, dann müssen die Grundannahmen hinterfragt werden. So gelten z.B. die Aussagen dieser Vorlesung nicht auf extrem kleinen Skalen (dort gilt die Quantenmechanik) und nicht in starken Gravitationsfeldern (dort gilt die allgemeine Relativitätstheorie).

### 1.2.1 Inertialsystem

Hier beschäftigen wir uns mit den Koordinaten, die wir benutzen, um Bewegungen zu schreiben. Es lautet:

Es gibt ein Bezugssystem, in dem die kräftefreie Bewegung durch  $\vec{r} = \vec{v} = \text{const.}$  beschrieben wird. Dies nennen wir Inertialsystem.

In nicht-Inertialsystemen beschleunigt auch ein kräftefreies Teilchen, es erfährt *Scheinkräfte*.

### 1.2.2 Newtonsche Bewegungsgleichung

Die Kinematik (also die Bahnkurve) und die Kräfte sind verbunden durch die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Wir behandeln weitestgehend Systeme mit konstanter Masse (die Ausnahme der Raketengleichung, die sie in der Experimentalphysik gelernt haben, kann auch auf Bewegungsgleichungen für den Treibstoff und die Rakete reduziert werden). Dann haben wir

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}.$$

Eigentlich sollte man das als  $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m$  schreiben, denn links steht nur eine Eigenschaft der Bahnkurve und rechts die durch die *träge Masse*  $m$  dividierte Kraft. Im Allgemeinen hängt die Kraft von Ort, Geschwindigkeit und Zeit ab,  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ .

### 1.2.3 Reaktionsprinzip

Actio = Reactio

Die Kraft der Umgebung auf ein Teilchen gleicht sich mit der Kraft des Teilchens auf die Umgebung zu null aus. Das ist insbesondere wichtig bei der Wechselwirkung zwischen Teilchen. Manchmal haben wir aber auch ein von außen vorgegebenes Kraftfeld ohne dass wir die dies verursachenden Teilchen behandeln. Das ist aber immer ein Grenzfall einer Situation in der wir die Dynamik des Objekts, das die Kraft verursacht, als gegeben hinnehmen, also die Reaction vernachlässigen - z.B. wenn wir für ein kleines Objekt das Schwerfeld der Erde als gegeben hinnehmen.

### 1.2.4 Weitere Annahmen

Bis jetzt haben wir die von Isaac Newton formulierten Axiome dargestellt. Tatsächlich gibt es aber weitere Annahmen die die klassische Mechanik prägen, die Newton nicht als Annahmen erkannt hat. Dies ist für den Erkenntnisprozess der Naturwissenschaften typisch: Bei der ersten Entdeckung ist eine wissenschaftliche Tatsache oft noch nicht so gut analysiert, dass man sie treffsicher hinschreiben kann. Darum markiert das Originalwerk der Entdeckung zwar eine große intellektuelle Leistung, nicht aber den Stand der Dinge und die Referenz.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>manchmal sehen Sie Schriften von Menschen, die die Grundkonzepte der modernen Physik angreifen, ohne sie verstanden zu haben. Eine erste Indikation, dass sich jemand nicht wirklich

**Verbindungsline**

Kräfte zwischen zwei Körpern wirken entlang der Verbindungsline

Mathematisch gefasst: Für Körper 1 und 2 gilt

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}.$$

Das bedeutet insbesondere, dass diese Kräfte kein Drehmoment ausüben.

**Kräftesumme**

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so wirkt insgesamt die Summe der Einzelkräfte

Das bedeutet, dass z.B. Schwerkraft und elektromagnetische Kraft sich überlagern und nichts neues passiert.

## 1.3 Mathematische Struktur der Newtonschen Bewegungsgleichungen

### 1.3.1 Eindimensionale Bewegung für einen Massenpunkt

In vielen Fällen reicht es aus, die Bewegung in einer Dimension mit Koordinate  $x$  und Geschwindigkeit  $\dot{x}$  zu betrachten. Die allgemeinste Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt ist dann

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t).$$

Dies ist eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die wir als gekoppeltes System zweier DGLn erster Ordnung auffassen können

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x, \dot{x}, t)/m \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen weiß man, dass diese im Allgemeinen lösbar sind. Um die Lösung eindeutig zu machen, müssen zwei Anfangsbedingungen,  $x(t_0)$  und  $\dot{x}(t_0)$  spezifiziert werden. Diese Größen haben noch eine weitere physikalische Bedeutung: Sie definieren Erhaltungsgrößen - erhaltene Größen erhalten ihren Zahlenwert durch die Anfangsbedingungen. Da zu einer anderen Zeit  $t_1$  vorgegebene andere Anfangsbedingungen zur gleichen Bahnkurve  $x(t)$  vorgegeben werden können, spielt auch die Anfangszeit die Rolle einer Erhaltungsgröße - darum bleibt hier noch eine Erhaltungsgröße übrig.

Als Beispiel für eine Newtonsche Bewegungsgleichung wählen wir das freie gedämpfte Teilchen

$$m\dot{v} = -m\gamma v.$$

---

mit dem Thema auseinandergesetzt hat ist der ausschließliche Rückgriff auf die Pionierliteratur eines großen Namens, wie man das in Geisteswissenschaften wohl tut.

Dies ist eine gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten und ihre Lösung ist

$$\dot{x}(t) = v(t) = v(0)e^{-\gamma t}.$$

Uns interessiert allerdings die Bahnkurve  $x(t)$ . Wir integrieren noch einmal und erhalten

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

mit den zwei Integrationskonstanten  $x(0)$  und  $v(0)$ .

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn die Kraft nur vom Ort abhängt,  $F = F(x)$ . Für vernünftige Funktionen können wir eine Stammfunktion  $-U$  finden, also  $F(x) = -U'(x)$ , die potenzielle Energie.  $U$  ist nicht eindeutig: Addition einer Integrationskonstante lässt diese Beziehung intakt. Damit wird aus der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -U'(x)$$

durch Multiplikation von  $\dot{x}$

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}U'$$

was wir unter Nutzung der Kettenregel umschreiben können als

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right) = -\frac{dU(x)}{dt}.$$

Hier bedeutet die *totale* Zeitableitung, dass wir die Kettenregel verwenden. Diese Aussage sagt, dass die kinetische Energie, die links steht, sich durch die entlang der Bewegung im Allgemeinen veränderliche Geschwindigkeit verändert, diese aber durch die Änderung der potenziellen Energie aufgrund der Änderung der Teilchenkoordinate ausgeglichen wird. Das ist nichts anderes als der Energieerhaltungssatz

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x). \quad (1.8)$$

Natürlich sind andere Erhaltungsgrößen  $O$  möglich und diese können im Prinzip explizit Zeitabhängig sein. Dann lautet der  $O$ -Erhaltungssatz

$$\frac{dO}{dt}(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial O}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial O}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial O}{\partial t} = 0.$$

Bereits an diesem einfachen Beispiel sehen wir, wie Erhaltungsgrößen die Lösung von Bewegungsgleichungen vereinfachen: Die Anfangsbedingungen legen den Wert von  $E = E(x(t_0), \dot{x}(t_0))$  fest. Damit sind alle Größen in Gl. (1.8) bestimmt und wir können diese Gleichung als Bestimmungsgleichung der Bewegung auffassen. Im Gegensatz zur Newtonschen Bewegungsgleichung ist das eine Differenzialgleichung erster Ordnung (weshalb man Erhaltungsgrößen auch 'erste Integrale der Bewegung' nennt). Explizit ist

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x)$$

eine DGL mit getrennten Veränderlichen. Wir lösen auf

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

wobei die Wahl des Vorzeichens vom Vorzeichen von  $\dot{x}(t_0)$  abhängt. Dies können wir mit der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  hochintegrieren zu

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}} \equiv \Delta t(x).$$

Wenn wir das Integral berechnen und die entstehende Relation auflösen können, dann gewinnen wir so  $x(t)$ . Im Allgemeinen stellen sich aber diese beiden Einschränkungen als recht stark heraus.

Diese Betrachtung hilft es uns aber, Bahnkurven zu klassifizieren. Klarerweise macht dieser Ausdruck nur Sinn, wenn die Wurzel reell ist, d.h. wenn  $E \geq V(x)$ . Dies erlaubt es und, Umkehrpunkte der Bewegung  $x_i$  als Lösungen der Gleichung

$$V(x_i) = E$$

zu bestimmen. Sei  $n$  die Zahl Ihrer Lösungen und seien diese geordnet  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Die Kombination aus der Zahl der Lösungen dieser Gleichung und der Wahl der Anfangsbedingung  $x_0$  erlaubt folgende Klassifikation:

**Ungebundene Bewegung** Es existieren keine Umkehrpunkte. Damit ändert auch  $\dot{x}$  sein Vorzeichen nicht.

**Streulösung** Es ist  $n \geq 1$  und  $x_0 < x_1$  oder  $x_0 > x_n$ . Wir beschränken uns oBdA auf den ersten Fall. Ist dann  $\dot{x}(t_0) < 0$  haben wir wieder ungebundene Bewegung. Ist  $\dot{x}(t_0) > 0$  dann haben wir eine Streulösung: Das Teilchen läuft auf  $x_1$  zu, ändert dort seine Richtung, und läuft dann in negative  $x$  Richtung ins Unendliche. Wir können hier die Zeit bis zum Umkehrpunkt bestimmen als

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}}$$

und für die auslaufende Lösung dann

$$t - t_1 = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}}.$$

Die Punkte mit  $x_0 \leq x < x_1$  werden dabei mehrfach durchlaufen.

**Gebundene Lösung** Es ist  $n \geq 2$  und  $x_j < x_0 < x_{j+1}$ . Damit findet die Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten statt. Ähnlich wie bei der Streulösung können wir  $t(x)$  abschnittsweise berechnen und zusammensetzen. Die Bewegung

ist periodisch: Wenn  $E$  und  $x$  festlegen ist  $\dot{x}$  und damit die Lösung eindeutig bestimmt, d.h. eine Bewegung zwischen Umkehrpunkten gleicht der anderen. Damit können wir die Periode als zwei mal die Zeit zwischen den Umkehrpunkten berechnen

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\xi}{\sqrt{E - V(\xi)}}. \quad (1.9)$$

Hier erkennen wir eine mathematische Herausforderung, die immer in der Nähe von Umkehrpunkten auftritt: Der Nenner des Integranden in 1.9 hat eine Nullstelle, der Integrand divergiert also. Wir diskutieren dies exemplarisch an der oberen Integrationsgrenze: Solange  $V(\xi) - E$  bei  $x_{j+1}$  nur eine einfache Nullstelle hat, solange also  $V'(x_{j+1}) \neq 0$  ist, ist diese Singularität integrierbar, d.h. das Integral hat einen endlichen Wert. Wir können den Integranden in der Nähe von  $x_{j+1}$  dann nämlich nähern durch  $(V'(x_{j+1})(x_{j+1} - \xi))^{-1/2}$  d.h. in der Nähe der oberen Grenze verhält sich die Stammfunktion wie  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_{j+1} - \xi}{V'(x_{j+1})}}$  und macht keine Probleme.

Wir illustrieren die Anwendung dieser Technik anhand von Beispielen. Wir starten mit dem umgedrehten Harmonischen Oszillator, mit

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \Omega^2 x^2).$$

Das Potenzial ist überall  $\leq 0$ . Im Fall  $E > 0$  liegt also ungebundene Bewegung vor. Für Anfangsbedingungen mit  $\dot{x}(0) > 0$  haben wir

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E + m\Omega^2 \xi^2/2}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 + k^2 \xi^2}}$$

mit  $k = \sqrt{m\Omega^2/2E}$ . Um dieses Integral zu knacken brauchen wir eine Funktion, die etwas freundlicher macht wenn man sie quadriert und 1 dazuaddiert. Das wäre der sinus hyperbolicus und wir versuchen also  $\sinh s = k\xi$ . Wir haben als  $d\xi = \frac{1}{k} \cosh s ds$  und damit

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{\sinh^{-1} kx_0}^{\sinh^{-1} kx} ds = \frac{1}{\Omega} [\sinh^{-1} kx - \sinh^{-1} kx_0]$$

das können wir leicht invertieren (der sinus hyperbolicus ist eindeutig invertierbar) zu

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\Omega^2}} \sinh(\Omega(t - t_0))$$

wobei  $t_0$  die Integrationskonstanten absorbiert.

Im Fall  $E < 0$  gibt es eine Streulösung. Wir nehmen an, dass  $x_0 < 0$  ist und  $\dot{x}(0) < 0$ . Der Umkehrpunkt ist dann bei

$$x_1 = -\frac{1}{\Omega} \sqrt{-\frac{2E}{m}}$$



und die Zeit bis zum Umkehrpunkt ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{E + m\Omega^2\xi^2/2}} = \frac{1}{\Omega} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x_1^2}}.$$

Aus Überlegungen analog zu oben substituieren wir  $\xi = x_1 \cosh s$  und finden

$$t_1 = \frac{1}{\Omega} \int_{\cosh^{-1}\left(\frac{x_0}{x_1}\right)}^0 ds = \frac{\cosh^{-1}\left(x_0\Omega\sqrt{-\frac{m}{2E}}\right)}{\Omega}.$$

Wir sehen, dass es hier also keine Probleme mit der oberen Integrationsgrenze gibt.

Ein Interessanter Spezialfall ist  $E = 0$ . In dem Fall wird der Umkehrpunkt am Ursprung erst nach unendlicher Zeit erreicht. Dies ist ein Beispiel für eine zweifache Nullstelle und eine Divergenz des Integrals, wie oben beschrieben.

Als weiteres Beispiel betrachten wir ein Teilchen in einem Kosinuspotenzial wie es z.B. bei einem mathematischen Pendel auftritt

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U \cos x$$

mit einer Energie  $|E| < U_0$ . Die Bewegung ist gebunden zwischen  $\pm x_0 = \pm \cos^{-1}(-E/U)$ . Wir berechnen die Schwingungsperiode als

$$T = \sqrt{8m} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{E + U \cos \xi}} = \sqrt{\frac{8m}{U}} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\cos \xi - \cos x_0}}$$

Wir nutzen  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  und substituieren auf eine neue Integrationsvariable  $\theta$  mit dem Kunstgriff

$$\sin \frac{\xi}{2} = \sin \frac{x_0}{2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Dies deckt den gesamten Wertebereich ab, die Integrationsgrenze ist dann  $\pi$ . Jetzt differenzieren wir beide Seiten nach  $\theta$  und erhalten

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\xi}{2} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1}{2} \sin \frac{x_0}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Dies liefert uns

$$d\xi = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{x_0}{2}}{\cos \frac{\xi}{2}} d\theta = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{x_0}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta.$$

Dies ergibt für die Periode den kompakten Ausdruck

$$T = \frac{\sqrt{2m}}{U} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{2m}}{U} E\left(\frac{\pi}{2}, \sin^2 \frac{x_0}{2}\right) -$$

Die Funktion  $E$  hier ist eine spezielle Funktion, ein vollständiges elliptisches Integral. Seine Eigenschaften finden Sie tabelliert.

### 1.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Hier lautet die Newtonsche BwGl

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

In einer Dimension konnten wir argumentieren, dass eine ausschließlich ortsabhängige Kraft immer eine Stammfunktion hat. Bereits dies ist in höheren Dimensionen nicht mehr klar. Jetzt stellen wir von neuem die Frage, wann die Energie erhalten ist. Wir zerlegen darum die Kraft in einen konservativen (=erhaltenden) und einen dissipativen Anteil  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}$ . Damit haben wir

$$m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{kons}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}. \quad (1.10)$$

Analog zum eindimensionalen Fall wollen wir eine potenzielle Energie  $U$  finden so, dass die linke Seite der Erhaltung einer Gesamtenergie  $E = T + U$  geschrieben werden kann. Klarerweise funktioniert das, wenn die Kraft als Gradient eines Potentials geschrieben werden kann  $\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U$ . Ist dies die einzige Möglichkeit? Wenn wir eine Kraft  $\vec{F}_{\perp}$  haben, die immer senkrecht auf  $\dot{\vec{r}}$  steht, trägt sie nichts weiteres zur linken Seite bei, das Kraftfeld bleibt also konservativ. Dies kann sichergestellt werden durch  $\vec{F}_{\perp} = \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$ . Damit hat eine konservative Kraft die allgemeine <sup>2</sup> Form

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

Insgesamt hat also 17 die Form von

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}$$

und die rechte Seite, die den Grad an Verletzung der Energieerhaltung beschreibt, hat die Bedeutung einer Verlustleistung. In konservativen Systemen verschwindet sie und die Energie ist erhalten. Das nehmen wir ab jetzt an. In den meisten Beispielen der TP 1b ist auch  $\vec{B} = 0$ . Wenn  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$  kann  $U$  aufgrund der Wegunabhängigkeit des Linienintegrals durch Linienintegration entlang eines kommoden Pfades behandelt werden. Der Vollständigkeit halber geben wir auch noch die mathematische Form für einen allgemeinen Erhaltungssatz einer Observable  $O$  an als

$$\frac{d}{dt}O(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial O}{\partial r_i} \dot{r}_i + \frac{\partial O}{\partial \dot{r}_i} \ddot{r}_i + \frac{\partial O}{\partial t} \equiv \vec{\nabla}_r \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{\nabla}_{\dot{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\partial O}{\partial t} = 0.$$

---

<sup>2</sup>dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt ist eine Konsequenz des Satzes von Helmholtz, der in der TP 2 ausführlich behandelt wird

# Kapitel 2

## Lagrangeformalismus

Das wichtigste konzeptionelle Lernziel der TP Ib ist die Nutzung des Lagrangeformalismus, einer Methode die die Mechanik auf ein Extremalisierungsproblem zurückführt. Damit wollen wir jetzt starten, und die Behandlung von Beispielen dann auch konsequent mit diesem leistungsfähigen Mechanismus machen.

### 2.1 Mathematischer Einschub: Extremalisierung und Variationsrechnung

Die Kurvendiskussion in einer Dimension ist eines der Standardthemen der Analysis schon in der Schule. Wir wollen in diesem Kapitel dieses Thema deutlich erweitern.

#### 2.1.1 Kurvendiskussion in einer Dimension

Für eine reellwertige stetig differenzierbare Funktion  $f$  nennen wir alle Punkte  $x_i$  mit  $f'(x_i) = 0$  extremal. Um zu entscheiden, um welche Art Extremum es sich handelt, betrachten wir die Entwicklung um den Extremwert in zweiter Ordnung Taylorentwicklung

$$f(x) = f(x_i) + \frac{1}{2}f''(x_i)(x - x_i)^2 + O\left((x - x_i)^3\right).$$

Wenn die zweite Ableitung positiv (negativ) ist, handelt es sich um ein Minimum (Maximum). Verschwindet sie, dann handelt es sich im Allgemeinen um einen Sattelpunkt. Zur Bestimmung von Extremwerten müssen auch die Randwerte diskutiert werden.

#### 2.1.2 Extremwerte von Skalarfeldern

Auch Skalarfelder, also Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  können natürlich Extremwerte haben. Notwendig dafür ist, dass die Richtungsableitung in alle Richtungen

verschwindet. Da die Richtungsableitung in Richtung des Einheitsvektors  $\hat{n}$  gerade  $\hat{n} \cdot \vec{\nabla} f$  ist erzwingt das, dass  $\vec{\nabla} f(\vec{x}_i) = \vec{0}$  ist. Zur Bestimmung der Art des Extremums betrachten wir wieder die Entwicklung in zweiter Ordnung

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_i) \simeq \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_i)^T \mathbf{H} (\vec{x} - \vec{x}_i) \quad H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist ein Polynom zweiter Ordnung in den Komponenten von  $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{x}_i$  und man nennt einen solchen Ausdruck eine *quadratische Form*. Die Matrix der zweiten Ableitungen  $\mathbf{H}$  heißt Hessematrix. Per Konstruktion ist die Hessematrix symmetrisch  $H_{ji} = H_{ij}$  und damit diagonalisierbar. Um ein lokales Minimum (Maximum) zu haben muss die rechte Seite für jede Wahl von  $\vec{\xi} \neq 0$  positiv (negativ) sein. Hier nutzen wir die Diagonalisierbarkeit aus: Wir schieben Basiswechselformen  $\mathbf{T}$  ein, die  $\mathbf{H}$  diagonalisieren wie folgt

$$\frac{1}{2} \vec{\xi}^T \mathbf{H} \vec{\xi} = \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{H} \mathbf{T} \tilde{\xi} = \frac{1}{2} \vec{y}^T \mathbf{D} \vec{y} \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit  $\vec{y} = \mathbf{T} \tilde{\xi}$  und  $\lambda_i$  sind die Eigenwerte von  $\mathbf{H}$ . Hier haben wir ausgenutzt, dass die Diagonalisierung der symmetrischen Matrix  $\mathbf{H}$  durch eine orthogonale Matrix  $\mathbf{T}$ , also  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$  bewerkstelligt wird. Die rechte Seite lässt sich dann einfach umschreiben als

$$\frac{1}{2} \vec{y}^T \mathbf{D} \vec{y} = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i y_i^2.$$

Wir können genau dann garantieren dass sie positiv (negativ) ist, wenn alle Eigenwerte positiv (negativ) sind. Da der Basiswechsel von  $\xi$  nach  $y$  bijektiv ist, gilt diese Aussage auch im ursprünglichen Ausdruck. Eine solche Matrix nennt man positiv (negativ) definit und schreibt auch kurz  $\mathbf{H} > 0$  ( $\mathbf{H} < 0$ ). Wenn die Gleichheit auch erlaubt ist, also auch der Eigenwert 0, dann spricht man von semidefiniten Matrizen und wenn Eigenwerte mit beiden Vorzeichen auftreten von indefiniten Matrizen.

Wir fassen also zusammen dass ein Skalarfeld an einem Extremwert dann ein Minimum (Maximum) hat, wenn seine Hessematrix positiv (negativ) definit ist.

### 2.1.3 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Manchmal möchten wir ein Skalarfeld nicht auf seiner Definitionsmenge betrachten, sondern auf einer eingeschränkten Menge, die einer Nebenbedingung gehört. Die eleganteste Lösung dafür ist natürlich, ein neues Feld niedriger Dimension hinzuschreiben das die Nebenbedingung erfüllt, aber das geht nicht immer. Wesentlich robuster ist die Methode der Lagrangemultiplikatoren, die wir zunächst für den einfachsten Fall motivieren wollen bevor wir sie allgemein hinschreiben, effektiv und robust.

Wir betrachten den Fall einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer einzigen Nebenbedingung geschrieben als  $h(x, y) = 0$ . Wir führen eine neue Funktion ein

$$f_\lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$$

und behaupten, dass die Extrema von  $f_\lambda$  gleich den Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung sind. Beginnen wir mit der notwendigen Bedingung

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} = h(x, y) = 0.$$

Diese Bedingung garantiert also die Erfüllung der Nebenbedingung. Jetzt berechnen wir den Gradienten bzgl. der ursprünglichen Variablen

$$\nabla f_\lambda = \nabla f + \lambda \nabla h = 0. \quad (2.1)$$

Der Gradient der Zwangsbedingung  $\nabla h$  steht senkrecht auf die Fläche  $h = \text{const.}$  Gleichung 20 erzwingt also, dass die Gradienten von  $f$  und von  $h$  linear abhängig sind. Damit wird sie gelöst von den Punkten, an denen der steilste Anstieg von  $f$  senkrecht auf  $h = \text{const.}$  steht und somit ist die Richtungsableitung von  $f$  entlang  $h = \text{const.}$  gleich null - also haben wir die erwünschte Bedingung für ein Extremum mit Nebenbedingung.

Als Beispiel dieses einfachen Falles betrachten wir die Optimierung von  $f = xy$  auf dem Einheitskreis  $h = x^2 + y^2 - 1$ . Dies wäre im Prinzip mittels Polarkoordinaten auflösbar, kann aber auch mit Lagrangemultiplikatoren geregelt werden. Wir haben dann

$$f_\lambda = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und die Gleichungen zur Extremalisierung lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} &= y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} &= x + 2\lambda y = 0. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich  $-2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$  also  $x = \pm y$  und daraus ergibt sich mit der ersten Gleichung, dass die gesuchten Extrema gerade  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma, \sigma')$  mit  $\sigma, \sigma' \in \{1, -1\}$  sind.

Die Diskussion bisher hat keinen expliziten Zugriff auf die Dimension gemacht. Das Argument zur Gültigkeit dieses Verfahrens lässt sich mit mehr Schreibarbeit übertragen auf Skalarfelder auf  $\mathbb{R}^n$  und  $k < n$  Nebenbedingungen. Die entsprechende zu extremalisierende Funktion ist dann

$$f_\lambda(\vec{r}, \lambda_1 \dots \lambda_k) = f(\vec{r}) + \sum_{j=1}^k \lambda_j h_j(\vec{r}).$$

### 2.1.4 Variationsrechnung ohne Nebenbedingungen

Bisher haben wir Skalarfelder mit Definitionsbereichen endlicher Dimension angeschaut. In einer Reihe von Fragestellungen interessieren uns aber Größen, die von ganzen Funktionen abhängen - solche Objekte heißen Funktionale. Wir betrachten die wichtigste Klasse von Funktionalen für die Physik.

Unsere Variablen sind  $n$  Funktionen einer Variablen  $x$ ,  $y_j(x)$  und ihre Ableitungen sind  $y'_j$ . Der Definitionsbereich ist  $x \in [x_i, x_f]$  und wir fordern, dass die Randwerte der Funktionen festgelegt sind  $y_j(x_{i/f}) = y_j^{(i/f)}$ . Extremalisieren möchten wir das Funktional

$$J[\{y_i\}, \{y'_i\}] = \int_{x_i}^{x_f} dx L(\{y_i\}, \{y'_i\}, x). \quad (2.2)$$

Auch hier ist das Funktional extremal, wenn es sich in bei kleinen Änderungen der  $y_i$  in erster Ordnung stationär ist. Wir müssen also eine Methode finden,  $J$  nach den  $y_i$  abzuleiten (das heißt dann Funktionalableitung). Wir schreiben das hier sehr ausführlich aus, später verwenden wir dann eine daraus resultierende Kurzschreibweise.

Wir variieren die Funktionen  $y_i$  so, dass sie weiterhin die Randbedingungen erfüllen. Wir wählen also beschränkte Funktionen  $\alpha_j(x)$  mit  $j = 1 \dots n$  so, dass  $\alpha_j(x_i) = \alpha_j(x_f) = 0$ . Wir variieren die Funktionen gemäß der Vorschrift

$$y_j(x) \rightarrow y_j(x) + \epsilon \alpha_j(x).$$

Stationarität betrachtet nun die lineare Ordnung der Änderung von  $J$  unter der Variation, d.h. wir fordern

$$J[\{y_i + \epsilon \alpha_j\}, \{y'_i + \epsilon \alpha'_j\}] - J[\{y_i\}, \{y'_i\}] \in O(\epsilon^2). \quad (2.3)$$

Zur Berechnung der linken Seite Taylorentwickeln wir den Integranden von Gl. (2.2) als

$$\begin{aligned} & J[\{y_i + \epsilon \alpha_j\}, \{y'_i + \epsilon \alpha'_j\}] - J[\{y_i\}, \{y'_i\}] = \\ & \int dx (L(\{y_j + \epsilon \alpha_j\}, \{y'_j + \epsilon \alpha'_j\}, x) - L(\{y_i\}, \{y'_i\}, x)) = \\ & \epsilon \int dx \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial y_j} \alpha_j + \frac{\partial L}{\partial y'_j} \alpha'_j \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Aus der Stationaritätsbedingung Gl (2.3) wird so

$$0 = \int dx \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial y_j} \alpha_j + \frac{\partial L}{\partial y'_j} \alpha'_j \right).$$

Das Problem dieses Ausdrucks ist, dass hier sowohl die  $\alpha_j$  als auch ihre Ableitungen stehen, die aber natürlich nicht unabhängig voneinander sind. Um

dies zu klären integrieren wir den zweiten Term partiell

$$\int dx \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial y_j} \alpha_j + \frac{\partial L}{\partial y'_j} \alpha'_j \right) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial y'_j} \alpha_j \Big|_{x_i}^{x_f} + \int dx \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \frac{\partial L}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_j} \right) \right).$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, weil  $\alpha_j(x_i) = \alpha_j(x_f) = 0$ . Für die Stationaritätsbedingung muss auch der zweite Term verschwinden. Da bis auf die Festlegung der Randbedingung die  $\alpha_j$  beliebig waren, kann dies nur erfüllt werden, wenn die runde Klammer verschwindet. Damit ist die Stationaritätsbedingung äquivalent zu den  $n$  gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_j} \right).$$

Diese heißen Euler-Lagrange-Gleichungen.

Bevor wir uns in Anwendungen und Beispiele stürzen kümmern wir uns noch um einige wichtige Eigenschaften.

**Koordinatenunabhängigkeit** Die erste betrifft die Situation, in der bestimmte Funktionen in  $L$  gar nicht auftauchen, d.h. wenn

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} = 0$$

ist. Dann ist nach der entsprechenden Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_k} \right) = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y'_k} = \text{const.}$$

**Parameterunabhängigkeit** Die zweite betrifft die Situation, in der  $L$  nicht explizit von  $x$  abhängt. Mit der Definition

$$H = \sum_j y'_j \frac{\partial L}{\partial y'_j} - L$$

ist dann unter Anwendung von Ketten- und Produktregel

$$\frac{dH}{dx} = \sum_j \left( y'_j \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_j} \right) + y''_j \frac{\partial L}{\partial y'_j} \right) - \sum_j \left( y'_j \frac{\partial L}{\partial y_j} + y''_j \frac{\partial L}{\partial y'_j} \right) = 0$$

wobei wir die Euler-Lagrange-Gleichungen ausgenutzt haben, wegen der sich der erste und der dritte Term wegheben. Das bedeutet also, dass wenn  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  dann ist  $H = \text{const.}$  .

**Mehrdeutigkeit** Zwei verschiedene Integranden  $L$  und  $L'$  liefern die gleichen Euler-Lagrange-Gleichungen, wenn  $f(\{y_j\}, x) L - L' = \frac{df}{dx}$  ist. Dies lässt sich durch direktes Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen überprüfen (Übung). Wir können aber direkt den Unterschied der Funktionale berechnen

$$J - J' = \int_{x_i}^{x_f} dx \frac{df}{dx} = f(\{y_j(x_i)\}, x_i) - f(\{y_j(x_f)\}, x_f).$$

Dies hängt also nur von den Endpunkten und den (unter der Variation festliegenden) Funktionswerten an den Endpunkten ab und ändert sich damit nicht unter der Variation - also sind auch die Euler-Lagrange-Gleichungen die gleichen.

**Beispiel: Geodäte** Wir geben zwei Punkte im  $\mathbb{R}^3$  vor,  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  vor sowie eine beliebig parameterisierte Kurve  $\vec{r}(t)$  zwischen ihnen,  $\vec{r}(0) = \vec{r}_1$ ,  $\vec{r}(1) = \vec{r}_2$ . Die Bogenlänge zwischen ihnen ist

$$D = \int_0^1 dt \left| \dot{\vec{r}} \right| = \int_0^1 dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Der Integrand hängt nicht von den drei Koordinaten ab, darum gelten Erhaltungssätze

$$\frac{\partial \sqrt{\sum_i \dot{r}_i^2}}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\dot{r}_j}{\sqrt{\sum_i \dot{r}_i^2}} = \text{const.}$$

Diese erzwingen dass wenigstens  $\dot{x} \propto \dot{y} \propto \dot{z}$  ist. Damit sind die kürzesten Verbindungen Geraden. Das ist natürlich ein einfaches Beispiel, wird aber interessanter, wenn wir solche Verbindungen z.B. auf einer Kugeloberfläche suchen, da sind es Großkreise.

**Beispiel: Seifenhaut** Wir betrachten eine Seifenhat, die an zwei parallelen Ringen mit Radius  $R$  an den Positionen  $\pm x_0$  haftet. Aufgrund der Oberflächenspannung sucht sie, ihre Oberfläche zu minimieren. Sie möchte also ihren Radius reduzieren, aber nicht zu steil, denn sonst verlängert sich die Sehne zu sehr. Die Seifenhaut ist rotationssymmetrisch um die  $x$ - Achse und ihr Radius sei  $y(x)$ . Wir erhalten für ihre Gesamtfläche

$$A = \int_{-x_0}^{x_0} dx 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

Wir könnten hier die Euler-Lagrange-Gleichung aufstellen, aber auch hier ist das sehr mühevoll. Stattdessen sehen wir, dass der Integrand nicht direkt von  $x$  abhängt und notieren dass folgendes konstant ist

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = 2\pi \left( y' y \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - y \sqrt{1 + y'^2} \right) \\ &= -2\pi \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \end{aligned}$$



Wenn  $H$  konstant ist, dann ist auch  $-H/2\pi$  konstant. Aufgrund der Symmetrie des Problems muss bei  $y'(0) = 0$  sein und damit haben wir

$$y(0) = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Wir lösen auf

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{y}{y(0)}\right)^2 - 1}.$$

Wiederum aufgrund der Symmetrie muss das obere Vorzeichen bei  $x > 0$  gelten. Wir trennen Variable

$$\int_{y(0)}^y \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{\left(\frac{\tilde{y}}{y(0)}\right)^2 - 1}} = \int_0^x d\tilde{x}.$$

Die Substitution, die den Nenner auf der linken Seite vereinfacht ist  $\tilde{y} = y(0) \cosh s$ ,  $d\tilde{y} = y(0) \sinh s ds$ . Damit erhalten wir

$$y(0) \cosh^{-1}\left(\frac{y}{y(0)}\right) = x.$$

Dies können wir auflösen zu

$$y = y(0) \cosh \frac{x}{y(0)}.$$

Der Wert  $y(0)$  wurde zunächst willkürlich angesetzt. Die Randbedingung erzwingt

$$R = y(0) \cosh \frac{R}{y(0)}.$$

Damit lässt sich  $y(0)$  finden, allerdings im Zweifel numerisch.

### 2.1.5 Variation mit isoperimetrischer Nebenbedingung

Auch bei Variationsproblemen kann es Nebenbedingungen geben. Wir starten mit den *isoperimetrischen* (=gleichdurchmesserigen) Nebenbedingungen, d.h. es handelt sich um eine einzige Nebenbedingung, die als Integral geschrieben werden kann

$$K[q, q'] = \int dx G(q, q', x).$$

Da es sich um eine einzige Nebenbedingung handelt, brauchen wir nur einen einzigen Lagrangemultiplikator. Wir variieren also über die Funktion  $L - \lambda G$  und erhalten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial q'} - \lambda \frac{\partial G}{\partial q'} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \lambda \frac{\partial G}{\partial q}.$$

Als Beispiel betrachten wir eine im Schwerfeld durchhängende Kette mit Massendichte  $\rho$ . Diese ist bei  $x = \pm S$  an der Höhe  $y = 0$  aufgehängt. Wir minimieren die potenzielle Energie

$$U = g\rho \int_{-S}^S dx y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Die Kette hat aber ein Länge  $D \geq 2S$

$$G = \int_{-S}^S dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

Eigentlich müssten wir im Integranden noch die Konstante  $D/S$  subtrahieren, die aber bei der Variation keine Rolle spielt, wohl aber bei der Einstellung der Zwangsbedingung. Dies ähnelt dem vorherigen Beispiel der Seifenhaut. Wir finden als Konstante

$$H = \frac{\lambda - g\rho y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \lambda - g\rho y(0)$$

wobei wir wieder die Symmetrie der Aufgabe genutzt haben. Wir gehen genau so vor wie vorher und finden

$$y(x) = \lambda + y(0) \cosh \frac{x}{y(0)}.$$

Die Randbedingung an der Aufhängung ergibt

$$y(\pm S) = \lambda + y(0) \cosh \frac{S}{y(0)} = 0$$

also ist der Lagrangemultiplikator

$$\lambda = -y(0) \cosh \frac{S}{y(0)}.$$

Insgesamt haben wir also die *Catenoide* (Kettenlinie)

$$y(x) = y(0) \left[ \cosh \frac{x}{y(0)} - \cosh \frac{S}{y(0)} \right].$$

Die Länge ist

$$\begin{aligned} D &= \int_{-S}^S dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_{-S}^S dx \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{y(0)}} \\ &= \int_{-S}^S dx \cosh \frac{x}{y(0)} = 2y(0) \sinh \frac{S}{y(0)}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich wiederum numerisch der Wert  $y(0)$ . Die Funktion ist gerade in  $y(0)$ , es gibt also zwei Lösungen mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die negative entspricht der durchhängenden Kette, die andere einem aufgestellten Bogen. Dieser hat eine optimale Kraftverteilung und wird in der Architektur eingesetzt, z.B. beim Gateway Arch in St. Louis, Mo.

### 2.1.6 Variation mit holonomer Nebenbedingung

Es gibt auch Situationen, an denen eine Nebenbedingung an jedem Punkt der Kurve gestellt wird, und nicht nur über das Integral. Wir beschränken uns auf den *holonomen* Fall, in dem diese Nebenbedingung nur die Funktionen enthält, nicht aber deren Ableitung  $g(\{q_i\}) = 0$ . Hier haben wir jetzt unendlich viele Nebenbedingungen und der Lagrangemultiplikator ist dementsprechend eine Funktion  $\lambda(x)$ . Wir führen das übliche Variationsargument jetzt für  $L(\{q\}, \{q'\}, x) - \lambda(x)g(\{q\})$  durch und erhalten als Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\lambda(x) \frac{\partial g}{\partial q_j}.$$

Damit lösen wir die Aufgabe der Geodäte auf der Kugel in kartesischen Koordinaten. Wir haben

$$L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \equiv v \quad g = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{r}_j}{v} = -2\lambda r_j.$$

Wir ändern die Variable in die Bogenlänge  $s$  also  $ds = v dt$ . Damit haben wir

$$\dot{r}_j = \frac{dr_j(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = vx'(s)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{r}_j}{v} = vr_j'' \quad (2.4)$$

Somit haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen beschrieben mit der Abkürzung

$$r_j'' = 2\mu r_j. \quad (2.5)$$

Zur weiteren Vereinfachungen nehmen wir

$$0 = \frac{d^2}{ds^2} g(x, y, z) = 2 \frac{d}{ds} \sum_j r_j r_j' = 2 \sum_j (r_j' r_j' + r_j r_j'').$$

Ferner ist

$$\sum_j r_j'^2 = \frac{d \sum_j r_j^2}{ds^2} = 1. \quad (2.6)$$

Wir multiplizieren also jede der drei Gleichungen (2.5) mit  $r_j$  und summieren

$$\sum_j r_j r_j'' = 2\mu \sum_j r_j^2 = 2\mu = -1$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (2.6) verwendet haben. Damit ist  $\mu = -1/2$  eine Konstante. Damit schreiben wir Gln. (2.5) um als

$$r_j'' = -r_j$$

und lösen sofort

$$r_j = a_j \cos(s + \phi_j).$$

Dies sind Gleichungen für Großkreise, Kreise auf der Kugeloberfläche um den Ursprung.

## 2.2 Das Hamiltonsche Prinzip

### 2.2.1 Kernaussage

Wir haben im vorangegangenen Kapitel gesehen, dass Variationsbedingungen zu Differenzialgleichungen führen - den Euler-Lagrange-Gleichungen - die eine recht lösungsfreundliche Struktur haben, insbesondere dadurch, dass wir Konstanten bestimmen konnten. Jetzt wollen wir den Spieß umdrehen, und für die Newtonschen Bewegungsgleichungen ein Variationsprinzip aufstellen.

Wir betrachten ein mechanisches System mit verallgemeinerten Koordinaten  $\{q_i, i = 1 \dots n\}$ . Bei Darstellung in Kugelkoordinaten können das z.B. Winkel sein, bei Objekten die in der Bewegung eingeschränkt sind sollen diese Einschränkungen schon eliminiert sein (was wir tun, wenn das nicht geht, kommt später). Das spezifische mechanische System wird beschrieben durch die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ . Für eine Bewegung zwischen vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten  $q_i(t_{i/f})$  ist die Wirkung ein Funktional der möglichen Wege zwischen den Punkten

$$S[\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t).$$

Das Hamiltonsche Prinzip der Mechanik besagt, dass die klassische Bahnkurve  $\{q_i(t), t_i \leq t \leq t_f\}$  diejenige ist, die  $S$  stationär macht,  $\partial S = 0$ . Aufgrund unserer Überlegungen im letzten Abschnitt sehen wir, dass die Bewegungsgleichungen damit Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

Wir nennen

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

die verallgemeinerten Impulse und die linke Seite der Euler-Lagrange-Gleichung entsprechend verallgemeinerte Kräfte. „Verallgemeinert“ bezieht sich hier auf den Fall, in dem nicht alle  $q_i$  kartesische Koordinaten sind.

Tatsächlich ist die Annahme des Prinzips stationärer Wirkung das, was eine *klassische* Theorie auszeichnet. In der Quantentheorie spielen auch Pfade mit

nicht-stationärer Wirkung eine Rolle <sup>1</sup> Die Tatsache, dass die Lagrangefunktion von Teilchenkoordinaten abhängt zeichnet die Punktmechanik aus. Jetzt brauchen wir noch die Form der Lagrangefunktion.

### 2.2.2 Die Lagrangefunktion

Wie sieht die Lagrangefunktion aus? Um etwas in das Symmetriedenken der Theorie hereinzukommen betrachten wir zunächst ein freies Teilchen in einem Inertialsystem. Die Physik des freien Teilchens muss ortsunabhängig sein, d.g.  $\mathcal{L}$  hängt nur von der Geschwindigkeit ab. Außerdem ist die Physik isotrop und die Lagrangefunktion differenzierbar, d.h.  $\mathcal{L}$  ist eine Funktion von  $\dot{\vec{r}}^2$ . Die einfachste, die wir uns denken können, ist Proportionalität mit einem Vorfaktor den wir aus Gründen der Anschlussfähigkeit zur normalen Newtonschen Mechanik so setzen

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = T.$$

Wir sehen sofort, dass der verallgemeinerte Impuls der lineare Impuls

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} \equiv \vec{p}$$

ist, und dass die Euler-Lagrange-Gleichung gerade den Impuls erhalten

$$\dot{\vec{p}} = \text{const.}$$

Um auch im Fall mit (konservativen) Kräften die Newtonschen Bewegungsgleichungen zu erhalten, setzen wir an

$$\vec{\mathcal{L}} = T - V$$

wobei  $V(\{q_i\})$  die potenzielle Energie ist. Dann ist z.B. in kartesischen Koordinaten

$$m \ddot{\vec{r}}_j = \vec{\nabla}_j \mathcal{L} = -\vec{\nabla}_j U$$

die Euler-Lagrange-Gleichung, und damit äquivalent zur Newtonschen Bewegungsgleichung.

Was sind mögliche Beiträge zur potenziellen Energie? Wir haben zunächst *äußere Kräfte* die auf jedes der Teilchen individuell wirken und explizit zeitabhängig sein können, beschrieben durch  $U_i(\{\vec{r}_i\}, t)$ . Dann gibt es Kräfte zwischen den Teilchen. Konsistent mit den Grundannahmen der Mechanik müssen diese entlang der Verbindungslinie wirken. Das Potenzial hängt damit nur vom Abstandsbetrag ab,  $U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ . Für ein  $N$ - Teilchen-System ohne Einschränkungen und Zwänge haben wir darum die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}, t) = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_i U_i(\vec{r}_i, t) - \sum_{i < j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>dieser Zugang zur Quantenphysik heißt Pfadintegralmethode und ist zwar konzeptionell elegant, ist aber zum Ersteinstieg in der TP 3 weniger geeignet.

Die letzte Summe ist eingeschränkt, um Doppelzählungen zu vermeiden. Wir könnten sie ersetzen durch

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

In unserer Betrachtung haben wir  $\vec{F}_\perp$  außer acht gelassen - das entwickeln Sie in der Übung und wir werden diesen Fall später, mit dem Hamiltonformalismus, genauer analysieren.

Wir werden ab jetzt die Mechanik sehr stark über die Lagrangefunktion erschließen. Wir müssen aber im Auge behalten, dass weiterhin Kräfte und Beschleunigungen die physikalisch realen Größen sind, nicht die Lagrangefunktion. Wie schon in der Variationsrechnung ausgeführt ist können wir mit einer beliebigen Funktion  $f(\{q_i\}, t)$  gemäß

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df}{dt} = \mathcal{L} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung einer Tatsache, die Sie schon aus der EP 1 kennen: Die potenzielle Energie ist nicht eindeutig, es können Konstanten addiert werden. Dies würde hier durch  $f = U_0 t$  bewerkstelligt.

## 2.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Im Fall der eindimensionalen Bewegung haben wir schon gesehen, dass Erhaltungsgrößen die Lösung der Bewegungsgleichung vereinfacht. Wir später ausgeführt hat ein System mit  $n$  Freiheitsgraden  $2n - 1$  Integrationskonstanten, aus denen wir jetzt physikalisch sinnvolle Erhaltungsgrößen bauen wollen.

### 2.3.1 Zyklische Koordinaten

Wie schon in der Variationsrechnung ausgeführt, entsteht eine Vereinfachung, wenn  $\mathcal{L}$  von einer der Koordinaten  $q_j$  gar nicht explizit abhängt. Das ist eine Symmetrie des Problems: Unter einer Änderung von  $q_j$ , also einer Symmetrietransformation, ändern sich  $\mathcal{L}$  und  $S$  nicht. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt dann die Erhaltung des zu  $q_j$  konjugierten Impulses

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0.$$

Damit ist es wichtig, die verallgemeinerten Koordinaten so zu wählen, dass möglichst viele zyklisch sind.

#### 2.3.1.1 Rotationssymmetrie

Wenn der Aufbau um eine Achse rotationssymmetrisch ist, liegt es nahe, Koordinaten so zu wählen dass dies die  $z$ -Achse ist. Wir schreiben dann die

Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r, \theta).$$

Zur Aufstellung des Erhaltungssatzes berechnen wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \equiv L_z \quad \frac{dL_z}{dt} = 0.$$

### 2.3.1.2 Zwei freie wechselwirkende Teilchen

Wir betrachten zwei Teilchen ohne äußere Kraft, nur mit Wechselwirkung

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Hier scheint es möglich zu sein, den gesamten Aufbau woanders hin zu bringen, ohne das Experiment zu verändern. Wir definieren Schwerpunkts- und Relativkoordinate

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Wir können auflösen und die alten Koordinaten finden

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Damit schreiben wir die kinetische Energie um

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 \\ &= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  und die reduzierte Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  bzw.  $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$  definiert. Die Lagrangefunktion ist in diesen Koordinaten

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r).$$

Damit ist  $\vec{R}$  zyklisch und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} \equiv \vec{P}$$

erhalten - der Impuls des Schwerpunktes. Die Lagrangefunktion zerfällt in zwei Summanden mit unabhängigen Variablen  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_r$

$$\mathcal{L}_R = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 \quad \mathcal{L}_r = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

und darum können Schwerpunkts- und Relativbewegung getrennt und unabhängig voneinander behandelt werden. Wir sehen auch, dass in der Relativbewegung der Drehimpuls erhalten ist.

Die reduzierte Masse, die die Relativbewegung bestimmt, verdient weitere Aufmerksamkeit. Wenn die Massen sehr unterschiedlich sind, dann ist  $\mu$  näherungsweise die kleinere Masse, wenn sie gleich sind, dann ist es die Hälfte dieser Masse. Wenn wir noch die Ausdrücke von  $\vec{r}_{1/2}$  oben anschauen passt zum ersten Fall, dass die Bewegung im Wesentlichen um den Ort der größeren Masse zentriert ist, während sie im zweiten Fall um den gemeinsamen Mittelpunkt geht, welcher sich dann selbst gleichförmig bewegt.

### 2.3.2 Zyklischer Parameter: Zeitunabhängigkeit

Auch diesen Fall haben wir mathematisch schon im allgemeinen Abschnitt über Variationsrechnung behandelt, wollen ihn hier aber mit physikalischem Leben erfüllen: Den Fall, in dem die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt,  $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$ . Dann ist die Wirkung zeitlich translationsinvariant

$$S = \int_{t_i+T}^{t_f+T} dt \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$$

unabhängig von  $T$ . Da  $t$  keine Koordinate ist, geht die Methode des nächsten Abschnitts aber nicht. Stattdessen nutzen wir, dass wir oben schon gezeigt haben, dass die *Hamiltonfunktion*

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

erhalten ist. Im generischen Fall von  $N$  Teilchen ohne Zwänge, Gl. (2.7) ist

$$H = \sum_i \dot{\vec{q}}_i \cdot m_i \dot{\vec{q}}_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_i U_i(\vec{r}_i, t) + \sum_{i < j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = E$$

die Gesamtenergie. Es gibt aber Fälle, in denen das nicht stimmt, nämlich wenn auf das System zeitabhängige (Zwangs-)kräfte wirken, aber dennoch die Lagrangefunktion zeitabhängig ist. Als Beispiel stellen wir uns ein Teilchen im Schwerfeld vor, das sich auf einer Führung bewegt, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die  $z$ -Achse rotiert. In Zylinderkoordinaten ist damit  $\phi = \omega t$  und die Führungskurve gibt  $\rho(z)$  vor. Wir haben

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \left( \dot{z}^2 (1 + \rho'^2) + \rho^2 \omega^2 \right) - mgz.$$

In diesem Fall steht das Zentrifugpotenzial  $-m\rho^2\omega^2/2$  bei der kinetischen Energie, geht aber in den Hamiltonwie eine potenzielle Energie ein und wir haben

$$H = \frac{m}{2} \dot{z}^2 (1 + \rho'^2) + mgz - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2$$

$H$  ist erhalten, aber nicht die physikalische Energie.



### 2.3.3 Das Noethertheorem

Eine wesentliche weitreichendere Theorie von Erhaltungsgrößen, die die bisherigen Spezialfälle enthält, ergibt sich aus dem Noethertheorem. Dies ist benannt nach der bedeutenden mathematisch Physikerin Emmy Noether, deren beeindruckende Biographie auch Zeugnis der Frauenfeindlichkeit der Akademie vor gerade einmal hundert Jahren ablegt.

Wir behandeln das Theorem in seiner einfachsten Form seiner Aussage: Jede einparametrische Schar von Koordinatentransformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, induzieren eine Erhaltungsgröße.

Bevor wir uns dieser Aussage in angemessener Allgemeinheit nähern, betrachten wir ein Beispiel: Wir betrachten die Transformation  $t \rightarrow t + \epsilon$ . Wenn  $\mathcal{L}$  zeitunabhängig ist, dann ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\{q\}, \{\dot{q}\})$$

invariant. Wir haben schon gesehen, dass dies die Erhaltung der Hamiltonfunktion impliziert.

Wir schreiben zunächst eine Transformation auf, die von dem einen Parameter  $\epsilon$  abhängt.

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow q_i^* = \Psi_i(\{q\}, \{\dot{q}\}, t; \epsilon) = q_i + \epsilon \psi_i(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + O(\epsilon^2) \\ t &\rightarrow t^* = \Phi(\{q\}, \{\dot{q}\}, t; \epsilon) = t + \epsilon \phi(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Transformationsgesetze per Taylorentwicklung linearisiert. Invarianz der Wirkung bedeutet

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \mathcal{L}\left(\{q_i^*\}, \left\{\frac{\partial q_i^*}{\partial t^*}\right\}, t^*\right) = S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial q_i}{\partial t}\right\}, t\right).$$

Wir linearisieren

$$\begin{aligned} S^* &= \int dt \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}\left(\{q_i^*\}, \left\{\frac{dq_i^*}{dt^*}\right\}, t^*\right) \\ &= \int dt \left[ \mathcal{L}\left(\{q_i\}, \left\{\frac{dq_i}{dt}\right\}, t\right) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}\left(\{q_i^*\}, \left\{\frac{dq_i^*}{dt^*}\right\}, t^*\right) \right) \right] + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Da die Invarianzbedingung der Wirkung unabhängig von der Wahl der Trajektorie gelten muss, ist es eine notwendige Bedingung für  $S = S^*$  dass

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}\left(\{q_i^*\}, \left\{\frac{dq_i^*}{dt^*}\right\}, t^*\right) \right) \right|_{\epsilon=0} = 0$$

ist. Wir brauchen die linearisierten Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \frac{dt^*}{dt} &= 1 + \epsilon \frac{d\phi}{dt} + O(\epsilon^2) \\ \frac{dq_i^*}{dt^*} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \psi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{dq_i^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \left( \dot{q}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \left( 1 - \epsilon \frac{d\phi}{dt} \right) = \dot{q}_i + \epsilon \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \dot{q}_i \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L} \left( \{q_i^*\}, \left\{ \frac{dq_i^*}{dt^*} \right\}, t^* \right) \right) \right|_{\epsilon=0} = \\ & \frac{d}{d\epsilon} \left[ \left( 1 + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \mathcal{L} \left( \{q_i + \epsilon \psi_i\}, \left\{ \dot{q}_i + \epsilon \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \dot{q}_i \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right\}, 1 + \epsilon \frac{d\phi}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} = 0 \end{aligned}$$

Wir entwickeln jetzt die Lagrangefunktion und daraus wird unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \psi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d\psi_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \phi + \mathcal{L} \frac{d\phi}{dt} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \phi \left( \mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Um hiermit weiterzukommen berechnen wir die totale Zeitableitung der Lagrangefunktion

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

und vergleichen mit

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Beides zusammen ergibt

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Und damit können wir in Gl. (2.8) einsetzen und erhalten

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( \mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \phi \right] \equiv \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Das so definierte  $Q$  ist eine durch die Wahl von  $\phi$  und  $\psi_i$  (also durch die Symmetrie) definierte Erhaltungsgröße.

Diese Gleichung enthält die bisher behandelten Spezialfälle. Wenn  $q_j$  zyklisch ist, dann haben wir  $\phi = 0$  und  $\psi_i = \delta_{ij}$ . Es folgt automatisch  $Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$  also der entsprechende Impuls. Die Zeitunabhängigkeit der Lagrangefunktion impliziert  $\psi_i = 0$  und  $\phi = 1$ . Damit bekommen wir wieder die Erhaltung der Hamiltonfunktion.

## 2.4 Globale Symmetrien und Gallileiinvarianz

Wir betrachten jetzt die Symmetrien und Invarianzen sehr allgemeiner mechanischer Systeme und den sich daraus ergebenden Erhaltungsgrößen. Die Prinzipien

hier sind sehr allgemein, das konkrete Beispiel ergibt sich aus der Struktur der Lagrangefunktion, bei der wir angenommen haben, dass die Teilchen sich alle sehr viel langsamer als die Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Eine Gallileitransformation wird beschrieben durch eine orthogonale Matrix  $\alpha = (\alpha_{ij})$  einen Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  eine Verschiebung  $\vec{a}$  und eine Zeitverschiebung  $t_0$ . Die Gallileitransformation ist dann

$$r_i \rightarrow r_i^* = \sum_j \alpha_{ij} r_j - v_i t - a_i \quad t \rightarrow t^* = t - t_0.$$

Bei der Interpretation der Gallileitransformation unterscheidet man die *passive Transformation* bei der das behandelte mechanische System unverändert bleibt, die Koordinaten sich aber ändern, und die *aktive Transformation* bei der das Koordinatensystem bleibt, die Bahnkurve des mechanischen Systems aber Gallileitransformiert wird.

Die Gallileitransformation enthält verschiedene Spezialfälle:

- die Zeitverschiebung,  $\alpha = 0$ ,  $\vec{v} = 0$ ,  $\vec{a} = 0$
- die Ortsverschiebung  $\alpha = 0$ ,  $\vec{v} = 0$ ,  $t_0 = 0$
- den Boost  $\alpha = 0$ ,  $\vec{a} = 0$ ,  $t_0 = 0$  also eine Transformation in ein gleichförmig bewegtes Bezugssystem
- die Isometrie des Raumes  $\vec{v} = 0$ ,  $\vec{a} = 0$ ,  $t_0 = 0$  die sich weiter zerlegen lässt in Drehungen  $\det \alpha = 1$  und Drehspiegelungen  $\det \alpha = -1$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Inverse der Gallileitransform existiert und auch eine Gallileitransformation ist, und dass die Hintereinanderausführung von zwei Gallileitransformationen wieder eine ist. Damit bilden die Gallileitransformationen die Gallileigruppe.

Ein System heißt *Gallileiinvariant* genau dann wenn sich seine Gesetze unter Gallileitransformation nicht ändern. Wir wollen dies dahingehend präzisieren dass sich die Wirkung unter Gallileitransformationen nicht ändern soll. Insbesondere behaupten wir, dass ein System von Teilchen mit Wechselwirkung aber ohne äußere Kräfte, beschrieben durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}) = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{j < i} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

gallileiinvariant ist. Aufgrund der Zeitunabhängigkeit ist  $\mathcal{L}$  invariant unter Zeitverschiebungen. Bei Ortsverschiebungen ändert sich  $\dot{\vec{r}}_i$  nicht, ebensowenig wie  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ . Unter einem Boost ändern sich wiederum diese Abstände nicht. Dafür ist

$$\frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \rightarrow \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i + \vec{v})^2 = \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + m_i \vec{v} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{m_i}{2} \vec{v}^2 = \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + m_i \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \vec{r}_i + \frac{\vec{v}^2}{2} t \right).$$

Damit ändert sich zwar die Lagrangefunktion unter dem Boost, aber die Änderung beeinflusst nicht die Euler-Lagrange-Gleichung, da es sich um eine totale Zeitableitung handelt.

Bei der Raumisometrie ändern sich die Abstände wie der Name schon sagt nicht. Machen wir dies explizit: Es ist

$$\dot{\vec{r}}^{*2} = \sum_i \dot{r}_i^{*2} = \sum_{ijk} \alpha_{ij} \alpha_{ik} \dot{r}_j \dot{r}_k.$$

Wir führen jetzt die Summation über  $i$  als erstes aus und schreiben eine der Matrizen durch ihre Transponierte um

$$\dot{\vec{r}}^{*2} = \sum_{jk} \dot{r}_j \dot{r}_k \sum_i \alpha_{ji}^T \alpha_{ik} = \sum_{jk} \dot{r}_j \dot{r}_k \delta_{jk} = \dot{\vec{r}}^2$$

wobei wir die Orthogonalität von  $\alpha$  genutzt haben. Hier haben wir nur ausgenutzt, wie sich  $\vec{r}$  transformiert. Wir könnten die analoge Rechnung auch für  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$  machen und damit auch für  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}$ .

Wir haben also gezeigt, dass die Wirkung sich unter allen Spezialfällen der Gallileigruppe höchstens auf triviale Art und Weise ändert. Es ist jetzt ein Leichtes (für Sie) zu zeigen, dass dies auch für die gesamte Gallileigruppe gilt - Sie müssen nur überprüfen, dass sich jede Gallileitransformation als Verkettung dieser Spezialfälle darstellen lässt. Wir wenden uns jetzt wichtigen Beispielen für den Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen zu. Diese sind für den Lagrange wechselwirkender Teilchen erfüllt, wir wollen darauf aber nicht ausdrücklich zurückgehen um diesen Zusammenhang sehr explizit zu zeigen auch in den Situationen, in denen die Symmetrie noch vorhanden ist, die Lagrangefunktion aber eine andere Gestalt hat.

### 2.4.1 Homogenität der Zeit

Dies haben wir oben schon behandelt, wählen jetzt aber einen leicht veränderten Zugang. Die Symmetrietransformation ist gegeben durch  $t^* = t + \epsilon$ . Damit ist der Erhaltungssatz

$$0 = \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{dH}{dt}$$

wobei wir für die zentrale Umformung Gl. 2.9 benutzt haben. So bekommen wir automatisch die schon bekannte Erhaltung der Hamiltonfunktion.

### 2.4.2 Homogenität des Raumes

Hier beleuchten wir die Konsequenzen der globalen Translationsinvarianz. Wir können diese parameterisieren durch einen Einheitsvektor  $\vec{n}$  also mit  $\vec{n}^2 = 1$  als  $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i + \epsilon \vec{n}$ . Folgend der Herleitung des Noethertheorems ist so

$$0 = \left( \frac{d\mathcal{L}^*}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \sum_i \vec{n} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{n} \cdot \sum_i \vec{p}_i = \vec{n} \cdot \vec{P}.$$

damit ist die Komponente des Schwerpunktsimpulses  $\vec{P}$ , die parallel zu  $\vec{n}$  ist, erhalten. Wenn das System in allen Richtungen translationsinvariant ist, dann kann  $\vec{n}$  beliebig gewählt werden und der Schwerpunktsimpuls ist insgesamt erhalten.

### 2.4.3 Isotropie des Raumes

Wir betrachten jetzt die Konsequenz der Invarianz unter einer infinitesimalen Drehung um eine Achse  $\vec{n}$ . Diese kann beschrieben werden (Skizze auf der Tafel) durch

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon (\vec{n} \times \vec{r}).$$

Auch ohne Skizze sehen wir, dass dies die Eigenschaften einer infinitesimalen Drehung hat: Die Änderung ist senkrecht auf den Ursprungsvektor und die Drehachse. Wir berechnen wie oben

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d\mathcal{L}^*}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} (\vec{n} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i) \right] \\ &= \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) (\vec{n} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \frac{d}{dt} \left[ \vec{n} \cdot \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \right]. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Euler-Lagrange-Gleichung verwendet und im letzten Schritt die zyklische Eigenschaft des Spatproduktes. Wir sehen, dass damit die Komponente des Drehimpulses des Schwerpunktes erhalten ist, die parallel zu  $\vec{n}$ , der Drehachse der Symmetrietransformation, liegt. Bei Kugelsymmetrie ist damit der gesamte Drehimpuls erhalten.

Es ist hier instruktiv, sich den Vorteil der Beschränkung auf eine infinitesimale Drehung vor Augen zu führen - die Beschreibung einer endlichen Drehung mittels Drehmatrix ist sehr viel aufwändiger, auch in der Parametrisierung. Unter der obigen Vorschrift gilt die isometrische Eigenschaft der Drehung in linearer Ordnung: Es ist

$$\vec{r}^{*2} = (\vec{r} + \epsilon (\vec{n} \times \vec{r}))^2 = \vec{r}^2 + 2\epsilon \vec{r} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) + O(\epsilon^2) = \vec{r}^2 + O(\epsilon^2).$$

### 2.4.4 Relativität der Raumzeit

Schon im Bisherigen gilt das Relativitätsprinzip: Wie oben gesehen ändern sich die Gleichungen der Mechanik nicht unter einem Boost, also dem Wechsel in ein sich gleichförmig bewegendes Koordinatensystem mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Hier ergibt sich, dass  $\vec{R}$ - $\vec{R}$  erhalten ist, dass sich der Schwerpunkt also gleichförmig bewegt.

## 2.5 Beschleunigte Bezugssysteme

Wir haben gesehen, dass sich die Bewegungsgleichungen der Mechanik bei der Transformation in ein gleichförmig bewegtes Bezugssystem nicht ändern. Wie sieht es bei dem Wechsel in ein beschleunigtes Bezugssystem aus?

### 2.5.1 Ein einfaches Beispiel

Bevor wir uns dem Thema formal nähern betrachten wir ein simples Beispiel: Ein Teilchen bewegt sich im Schwerfeld. Es ist gebunden an eine Stange, die den Winkel  $\theta$  mit der  $z$ - Achse einschließt und mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der  $xy$ - Ebene rotiert. Die Lagrangefunktion hier ist, ausgedrückt in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r, \dot{r}) &= \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \omega^2 \right) - mgr \cos \theta \\ &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 - m \left( gr \cos \theta - \frac{r^2}{2} \omega^2 \sin^2 \theta \right),\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Terme zusammengefasst, die von  $r$  aber nicht von  $\dot{r}$  abhängen. Formal sieht die zweite Zeile so aus wie die Lagrangefunktion eines Teilchens in einem effektiven Potenzial

$$V_{\text{eff}} = mgr \cos \theta - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

obwohl der zweite Term aus der kinetischen Energie stammt. Diese Kraft wirkt im mit der Stange mitrotierenden Bezugssystem, sie setzt sich aus dem Zusammenspiel von Rotation und Zwangskraft (Kraft der Stange auf das Teilchen) zusammen. Dies nennt man eine *Scheinkraft*, in diesem Fall die Zentrifugalkraft. Dies formalisiert eine Überlegung aus der Experimentalphysik.

### 2.5.2 Linear beschleunigtes Bezugssystem

Wir betrachten ein Koordinatensystem, das gegenüber dem Inertialsystem linear beschleunigt ist gemäß

$$\vec{r}^*(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{2} \vec{a} t^2.$$

Damit können wir die Lagrangefunktion transformieren

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}}^* - \vec{a} t)^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{*2} - m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{a} t + \text{const.} = \mathcal{L}^*(\dot{\vec{r}}^*).$$

Um diese Form der Lagrangefunktion zu interpretieren können wir die Euler-Lagrange-Gleichung aufstellen und erhalten

$$m \ddot{\vec{r}}^* = m \vec{a}$$

d.h. die Beschleunigung des Bezugssystems induziert eine Scheinkraft die wirkt wie eine konstante Kraft, analog zu einem konstanten Schwerfeld. Der letzte

Punkt funktioniert nur, weil die träge Masse (=der Vorfaktor der kinetischen Energie) gleich der schweren Masse (=der Kopplungsfaktor zwischen Teilchen und Schwerkraft) ist. Diese Tatsache nennet man *Äquivalenzprinzip* und es ist eine Grundannahme der in der allgemeinen Relativitätstheorie ausformulierten Theorie der Gravitation. Wir können das auch direkter sehen: Wir nehmen mit  $f(\vec{r}, t) = m\vec{r} \cdot \vec{a}t$  eine Eichtransformation vor

$$\mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{L}^* + \frac{df}{dt} = \mathcal{L}^* + m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{a}t + m\vec{r} \cdot \vec{a} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{*2} + m\vec{a} \cdot \vec{r}$$

was gerade die Lagrangefunktion im beschriebenen Schwerfeld ist.

### 2.5.3 Rotierendes Bezugssystem

Zur Beschreibung der Drehung definieren wir die Drehachse und Drehgeschwindigkeit als Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$ . Wir werden zwar später lernen, dass dies strenggenommen kein Vektor ist, aber dennoch bekommen wir hier eine sinnvolle Schreibweise. Damit kommt zur Teilchengeschwindigkeit im mitrotierten System noch der Geschwindigkeitsanteil durch die Drehung dazu

$$\left( \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \right)_{IS} = \left( \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

Für ein freies Teilchen haben wir damit

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left( \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + m\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2$$

Zur Interpretation der beiden neuen Terme betrachten wir die die entstehenden Euler-Lagrange-Gleichungen. Wir finden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + m(\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Für die andere Seite rotieren wir zunächst das Spatprodukt im zweiten Summanden und finden

$$\frac{\partial m\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})}{\partial \vec{r}} = -m(\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Für den anderen Term nutzen wir

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2.$$

Davon der Gradient nutzt u.a.  $\vec{\nabla} r^2 = \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r}$

$$\vec{\nabla} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = 2\omega^2 \vec{r} - 2(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} = -2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

wobei wir die Entwicklung des zweifachen Vektorprodukts im letzten Schritt genutzt haben. Alles zusammengesetzt erhalten wir für das freie Teilchen im mitrotierten Bezugssystem

$$\ddot{\vec{r}} = -2(\vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Der erste Term ist die Coriolisbeschleunigung, der zweite die Zentrifugalbeschleunigung.

## 2.6 Lagrangeformalismus mit Zwangsbedingungen

Wir haben bereits weiter oben die Variationsrechnung mit Zwangsbedingungen gelernt. Was sind ihre Anwendungen in der Mechanik? Die eleganteste und ökonomischste Methode zur Behandlung von Zwangsbedingungen ist es, einfach ein Koordinatensystem zu finden, das die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt. Das ist aber nicht immer der Weisheit erster Schluss. Zum Einen ist es nicht immer möglich bzw. sinnvoll, die Zwangsbedingungen so aufzulösen. Zum Anderen sagt uns diese Methode nichts über die ausgeübte Zwangskraft. Diese kann wichtig sein, um die Stabilität der Führung zu diskutieren oder ähnliches.

### 2.6.1 Euler-Lagrange-Gleichungen mit Zwangskraft

Es sei wie oben  $g(\{q\}) = 0$  eine Zwangsbedingung. Dann haben wir als Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}^*(\{q\}, \{\dot{q}\}, \lambda, t) = \mathcal{L}(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \lambda(t)g(\{q\}).$$

Die Variation bzgl.  $\lambda$  ergibt die Zwangsbedingung  $g(\{q\}) = 0$ . Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i}.$$

Die linke Seite ist die Zeitableitung eines verallgemeinerten Impulses, die rechte Seite also eine verallgemeinerte Kraft. Damit ist der letzte Term die Zwangskraft. Wir erarbeiten uns die Anwendung an einem Beispiel.

### 2.6.2 Freier Fall auf einem Zylinder

Wir betrachten ein Teilchen der Masse  $m$  auf einem Zylinder mit Öffnungswinkel  $\theta_0$  im Schwerfeld der Erde.

#### 2.6.2.1 Behandlung durch Eliminierung von Koordinaten

Wir können das natürlich ohne Lagrangemultiplikatoren in Kugelkoordinaten behandeln, indem wir aufstellen

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}^2 - mgr \cos \theta_0.$$

Wir sehen, dass  $\phi$  zyklisch ist, darum ist

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}$$

erhalten. Außerdem ist  $\mathcal{L}$  nicht explizit zeitabhängig. Dies führt zur Erhaltung von

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}^2 + mgr \cos \theta_0 \\ &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta_0} L_z^2 + mgr \cos \theta_0 = H(r, \dot{r}). \end{aligned}$$



Damit lässt sich die Aufgabe auf eindimensionale Energieerhaltung zurückführen und per Variablentrennung zumindest formal lösen. Die Bedeutung des gerade durchgeführten Rechenschrittes wird im nächsten Kapitel zu Zweikörperproblemen noch ausführlich behandelt.

### 2.6.2.2 Behandlung mit Lagrangemultiplikatoren

Auch hier benutzen wir Kugelkoordinaten. Wir haben

$$\mathcal{L}^*(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \lambda) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - mgr \cos \theta + \lambda (\theta - \theta_0).$$

Eine der Euler-Lagrange-Gleichungen ist weiterhin  $L_z = \text{const}$ . Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\dot{r}) &= mr\dot{\theta}^2 + mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - mg \cos \theta \\ &= mr \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}^2 - mg \cos \theta_0 \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Zwangsbedingung eingesetzt haben. Die dritte Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + mgr \sin \theta + \lambda.$$

Wiederum die Zwangsbedingung eingesetzt bekommen wir die Zwangskraft

$$F_z = -\hat{e}_\theta m \left( r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + gr \sin \theta \right).$$

## Kapitel 3

# Zweikörperproblem und Zentralkräfte

Wir behandeln jetzt das generische Problem zweier Teilchen ohne äußere Kraft, die über ein konservatives Kraftfeld wechselwirken. Wir werden dies später auf das Keplerproblem spezialisieren, das sowohl die Planetenbewegung im Universum als auch den klassischen Grenzfall des Wasserstoffatoms beschreibt. Die Lagrangsfunktion für dieses Kapitel ist

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

die sechs Freiheitsgrade beschreibt (und zwölf Variable hat). Das erste Ziel unseres Vorgehens ist es, diese Zahl zu reduzieren.

### 3.1 Reduktion auf ein Einteilchenproblem

Wir haben schon oben gelernt, dass in der Abwesenheit äußerer Kräfte der Schwerpunktsimpuls erhalten ist. Wir transformieren damit auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

und erhalten für die so umgeschriebene Lagrangefunktion  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cm}}(\dot{\vec{R}}) + \mathcal{L}_{\text{rel}}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$  mit

$$\mathcal{L}_{\text{cm}} = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 \quad \mathcal{L}_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

wobei wir auch wie oben die Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  und die reduzierte Masse  $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$  eingeführt haben. Die beiden Summanden hängen damit von disjunkten Variablensätzen ab und entkoppeln: Beim Aufstellen der

Euler-Lagrange-Gleichungen durch Differenziation trägt immer nur einer der beiden Summanden bei. Für die Schwerpunktsbewegung erhalten wir

$$\ddot{\vec{R}} = 0$$

d.h. der Schwerpunkt kann sich gleichförmig im Raum bewegen. Wir müssen darum ab jetzt noch das Problem der Relativbewegung, beschrieben durch  $\mathcal{L}_{\text{rel}}$  lösen.

### 3.2 Drehimpulserhaltung

Die Physik der Relativbewegung, beschrieben durch  $\mathcal{L}_{\text{rel}}$  ist isotrop. Nach dem Noethertheorem sind damit alle drei Komponenten des Drehimpulses erhalten. Davon kann man sich zu Fuß überzeugen: Wir können  $\mathcal{L}_{\text{rel}}$  durch Kugelkoordinaten beschreiben. Zur Festlegung des Kugel-Koordinatensystems können wir die  $z$ -Achse frei wählen. Die Kugelkoordinate  $\phi$  ist dann zyklisch und damit ist  $L_z$  erhalten. Da die  $z$ -Achse aber beliebig war, ist damit der gesamte Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  erhalten.

Wie nutzen wir diese Erhaltung *aller* Drehimpulskomponenten aus? Drehimpulserhaltung impliziert

$$\vec{L}(t) = \mu \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) = \vec{L}(0).$$

Damit zeichnet die Wahl der Anfangsbedingung, die  $\vec{L}(0)$  festlegt, eine Richtung im Raum aus. Aufgrund der Eigenschaften der Vektorproduktes bedeutet das, dass  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  zu allen Zeiten *senkrecht* auf  $\vec{L}(0)$  stehen. Wir können noch einen Schritt weiter gehen:  $\vec{r}(0)$  und  $\dot{\vec{r}}(0)$  spannen eine Ebene im Raum auf. Wir haben gerade schon argumentiert, dass sich  $\vec{r}(t)$  und  $\dot{\vec{r}}(t)$  nur in einer Ebene parallel zu dieser befinden können. Das muss aber die ursprüngliche Ebene selbst sein, denn Parallelverschiebung würde erfordern, dass zwischenzeitlich  $\dot{\vec{r}}(t)$  auch eine Komponente senkrecht zu dieser Ebene hat, im Widerspruch zum eben Gesagten.

Damit können wir also Zylinderkoordinaten so wählen, dass die  $z$ -Achse parallel zu  $\vec{L}(0)$  steht und die Bewegung, beschrieben durch  $\rho$  und  $\phi$  in der  $xy$ -Ebene verläuft. In dieser Konvention ist also

$$\mathcal{L}_{\text{rel}}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}) = \frac{\mu}{2} \rho^2 \dot{\phi}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 - U(\rho).$$

Die Erhaltung von  $\vec{L} = L_z \hat{e}_z$  ist reflektiert darin dass  $\phi$  zyklisch ist, d.h.

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{rel}}}{\partial \dot{\phi}} = \mu \rho \dot{\phi}^2 = \text{const.}$$

Ferner ist die Energie erhalten. Beides zusammen ergibt

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) = \text{const.} \quad U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{L_z^2}{2\mu\rho^2}.$$

Das effektive Potenzial  $U_{\text{eff}}$  der radialen Bewegungskomponente setzt sich aus dem ursprünglichen Potenzial  $U(\rho)$  und der Zentrifugalbarriere zusammen - dieser Term divergiert bei kleinen Abständen.

Hiermit ist es uns gelungen, das Problem auf eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen zu reduzieren.

Mit diesen Größen können wir die Bewegung weiter diskutieren. Einerseits können wir wieder direkt die Variablen trennen und den Radius als Funktion der Zeit berechnen

$$t - t_0 = L \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho'}{\sqrt{2(E - U(\rho'))/\mu - L^2/\mu^2 \rho'^2}}.$$

Die Auswertung dieses Integrals hängt von der Form von  $U(\rho)$  ab. In vielen Fällen interessiert aber das Timing weniger als die Form der Bahnkurve  $\rho(\phi)$ , z.B. ob sie geschlossen ist. Wir berechnen

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{d\phi}{dt} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^{-1} = \frac{L}{2\mu\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(\rho)) - L^2/\mu^2 \rho^2}}.$$

Dies kann wiederum hochintegriert werden zu

$$\phi - \phi_0 = L \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2} \frac{1}{\sqrt{2\mu(e - U(\rho')) - L^2/\rho'^2}}.$$

Hier wollen wir innehalten und die erwartete Lösungsstruktur zunächst qualitativ studieren und die Drehimpulsbarriere mit einbeziehen, d.h. wir nehmen an dass  $L = 0$  ist.

Im Fall dass  $U(\rho) \rightarrow \infty$  für  $\rho \rightarrow \infty$  wissen wir, dass für alle Energien über dem Potenzialminimum mindestens zwei Umkehrpunkte existieren. Die Bewegung läuft also zeitlich periodisch zwischen zwei Umkehrpunkten hin und her - die Bahnkurve ist gebunden (aber nicht unbedingt geschlossen).

Im Fall dass  $U(\rho) \rightarrow U_0$  für  $\rho \rightarrow \infty$  tritt dies nur dann auf, wenn  $E < U_0$ . Für  $E > U_0$  gibt es nur einen Umkehrpunkt, d.h. die Bahnkurve ist nicht geschlossen: Die Objekte nähern sich aus unendlicher Entfernung an und laufen wieder ins Unendliche auseinander. Diese ungebundene Bewegung nennt man auch Streuung.

### 3.3 Das Keplerproblem

Wir betrachten jetzt den Spezialfall der Anziehung zwischen zwei Punktmasse,  $U(\rho) = -\alpha/\rho$ , das Keplerproblem. Die Bahnkurve wird hier beschrieben durch

$$\phi = L \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{2\mu E \rho^2 + 2\mu \alpha \rho - L^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{2\mu E/L^2 + s^2 \mu \alpha/L^2 - s^2}}$$

wobei wir im letzten Schritt  $s = 1/\rho$  substituiert haben. Wir bestimmen die Umkehrradien als Nullstellen im Nenner und finden in einer praktischen Notation den Kurvenparameter  $P = \frac{L^2}{\mu \alpha}$  und die Exzentrizität  $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}}$  (der

Hintergrund dieser Namen wird sich gleich klären). Damit wird der Nenner zu  $\sqrt{\left(\frac{1+\epsilon}{2p} - s\right)\left(\frac{1-\epsilon}{2p} - s\right)}$ . Jetzt können wir substituieren und finden

$$\cos \phi = \frac{p - 1}{\epsilon}.$$

Dies können wir umstellen zu einer Parameterdarstellung der Bahnkurve

$$1 + \epsilon \cos \phi = \frac{p}{\rho}. \tag{3.1}$$

Die so parameterisierte Kurve nennt man einen Kegelschnitt - das Ergebnis des Schnittes eine Kreiskegels mit einer Ebene. Wir können Fälle unterscheiden

### 3.3.1 Steuflösung: Hyperbel

Der Fall  $\epsilon > 1$  ist gleichbedeutend mit  $E > 0$  d.h. nach unserer oben entwickelten Intuition ist dies eine Streulösung. Wir sehen in Gl. (3.1) dass dann bei  $\cos \phi = -1/\epsilon$  die linke Seite eine Nullstelle hat, d.h. dort läuft die Kurve ins Unendliche - die Asymptoten der Kurven liegen also um den Winkel  $\phi = 2\cos^{-1}(1/\epsilon)$  auseinander. Diese Kurve hat die Form einer Hyperbel.

### 3.3.2 Grenzfall Parabel

Im Fall der Energie  $E = 0$  haben wir  $\epsilon = 1$ . In diesem Fall verzerrt sich die Parabel und deckt den gesamten Winkel ab. Die Kurve wird zu einer Parabel. Dies sehen wir folgendermaßen: Wir gehen zurück von Polar- zu Zylinderkoordinaten mit  $\cos \phi = x/\rho$ . Die Kegelschnittgleichung wird damit zu  $p = \rho + x$ . Wir können dies nach  $\rho$  auflösen und quadrieren und erhalten

$$x^2 + y^2 = (p - x)^2$$

also

$$y^2 = p^2 - 2px$$

was wir klar als Parabel erkennen.

### 3.3.3 Minimale Energie: Kreis

Der Fall  $\epsilon = 0$  entspricht minimaler Energie  $E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$ . Hier ist  $\rho = \text{const}$ . Die Bahnkurve ist ein Kreis.

### 3.3.4 Gebundene Kurve: Ellipse

Den Fall der Ellipse,  $0 < \epsilon < 1$ , wollen wir etwas ausführlicher diskutieren. Es ist  $E < 0$  und damit gebundene Bewegung, und es ist per Definition  $p > 0$ . Wir substituieren die zwei Längeneinheiten

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Damit ist

$$p = \frac{b^2}{a}$$

sowie

$$1 - \epsilon^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad \epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Wir schreiben die Kegelschnittgleichung wieder um als

$$\rho + \epsilon x = p$$

und lösen auf zu

$$\begin{aligned} y^2 &= (p - \epsilon x)^2 - x^2 = x^2(\epsilon^2 - 1) + p^2 - 2\epsilon p x \\ &= (\epsilon^2 - 1) \left[ x^2 - 2\frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}x + \frac{\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 - 1)^2} \right] + p^2 - \frac{\epsilon^2 p^2}{\epsilon^2 - 1} \\ &= -\frac{b^2}{a^2} (x + a\epsilon)^2 + b^2 \end{aligned}$$

was wir auflösen können zur Ellipsengleichung auflösen

$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Es handelt sich hier um eine Ellipse mit Mittelpunkt  $(-a\epsilon, 0)$  und Hauptachsen  $a$  und  $b$ . Zur Geometrie erhalten Sie in der Vorlesung eine Zeichnung. Wir können aber auch zeigen, dass die definierende Eigenschaft aus der Schule, dass die Summe der Abstände jedes Punktes von den Brennpunkten eine Konstante ist direkt nachrechnen. Die Brennpunkte liegen in  $(0, 0)$  und  $(-2a\epsilon, 0)$ . Wir rechnen

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |p - \epsilon x|$$

und

$$\begin{aligned} \sqrt{(x + 2a\epsilon)^2 + y^2} &= \sqrt{(p - \epsilon x)^2 + 4a\epsilon x + 4a^2\epsilon^2} \\ &= \sqrt{x^2\epsilon^2 + 2\epsilon x(2a - p) + p^2 + 4a^2\epsilon^2} \\ &= \sqrt{x^2\epsilon^2 + 4\epsilon p \frac{1 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2}x + p^2 \left(1 + 4\frac{1}{(1 - \epsilon^2)^2}\right)} \\ &= \left| x\epsilon + 2p \frac{1 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right| \end{aligned}$$

Dies ergibt in der Summe eine Konstante.

Wir haben damit das erste Keplersche Gesetz bewiesen: Die Bahnkurve ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt der Schwerpunkt liegt.

Das zweite Keplersche Gesetz ist der Flächensatz. Wir schreiben die pro Zeit überstrichene Fläche auf als

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\rho^2}{2} \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$$

Der Flächensatz ist damit einfach eine Konsequenz der Drehimpulserhaltung und gilt für jedes Zentralpotenzial.

Das dritte Keplersche Gesetz beschäftigt sich mit den Umlaufzeiten  $T$ . Wir berechnen die Gesamtfläche der Ellipse zu

$$F = \int_0^T dt \frac{dF}{dt} = \frac{LT}{2\mu}.$$

Andererseits gilt die Flächenformel für die Ellipse

$$\begin{aligned} F &= \pi ab = \pi a \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ &= \pi a \sqrt{ap} = \pi a^{3/2} \frac{L}{\sqrt{\mu\alpha}}. \end{aligned}$$

Wir quadrieren beide Ausdrücke für die Fläche und erhalten

$$\frac{L^2 T^2}{2\mu} = \pi^2 a^3 \frac{L^2}{\mu\alpha}.$$

Wir sehen, dass sich die effektive Masse und der Drehimpuls herauskürzen. Wir sortieren nach den verbleibenden Anfangswerten und erhalten

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{2\pi^2}{\alpha}.$$

Damit sehen wir dass in einem gegebenen Potenzial das Verhältnis aus Quadrat der Umlaufzeiten zur dritten Potenz der Halbachse eine Konstante ist.

Letztendlich können wir uns für das Timing des Umlaufes absolut interessieren. Wir werten den entsprechenden Ausdruck aus

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha\rho}{|E|} - \frac{L^2}{2\mu|E|}}}$$

Im Nenner können wir quadratisch ergänzen

$$\rho^2 - \frac{\alpha\rho}{|E|} + \frac{L^2}{2\mu|E|} = \left(\rho - \frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu|E|} - \frac{\alpha^2}{4|E|^2}$$

Wir nutzen dass

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{L^2}{\mu\alpha} \frac{\mu\alpha^2}{2|E|L^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

ist. Im letzten Term klammern wir aus

$$\frac{L^2}{2\mu|E|} - \frac{\alpha^2}{4|E|^2} = a^2 \left( \frac{2L^2|E|}{\mu\alpha^2} - 1 \right) = -a^2\epsilon^2.$$

Damit wird das Integral erfreulich kompakt.

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2\epsilon^2 - (\rho - a)^2}}.$$

Zur weiteren Berechnung sehen wir, wie so oft, dass wir ein Additionstheorem unter der Wurzel provozieren müssen. Dazu substituieren wir

$$\rho = a - a\epsilon \cos \xi \quad d\rho = -a\epsilon \sin \xi d\xi.$$

Das gibt uns

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{(a - a\epsilon \cos \xi) a\epsilon \sin \xi}{a\epsilon \sin \xi} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} a \int (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} a (\xi - \epsilon \sin \xi). \end{aligned}$$

Dies ist erfreulich einfach, allerdings muss man bei der Auswertung - bei der Berechnung der Zeit, die zwischen zwei konkreten Radien gebraucht wird, zunächst die Substitution rückgängig machen. Der minimalre Radius entspricht beispielsweise  $\xi = 0$ , d.h. der obige Ausdruck beschreibt den Zeitablauf von minimalen Radius aus.

### 3.4 Klassische Streuung

Wir kommen jetzt zurück zur Streulösung, wollen uns aber der Theorie und Nomenklatur von Streuvorgängen etwas allgemeiner widmen. Von Streuung spricht man, wenn Objekte sich aus großer Entfernung annähern, wechselwirken, und wieder in großer Entfernung verschwinden. In dieser großen Entfernung kann man die Objekte als frei behandeln und sie z.B. präparieren oder detektieren. „Große Entfernung“ bezieht sich dabei auf die typische Reichweite der Wechselwirkung. Die so aneinander gestreuten Objekte können Teilchen aber auch Wellen sein.

Streuung ist aus mehrerlei Gründen in der Physik wichtig. Zum einen tritt sie vielfach natürlich auf, insbesondere in Gasen. Zum Anderen handelt es sich um eine wichtige experimentelle Technik: Die Objekte können in großer Entfernung präpariert und detektiert werden unter sehr kontrollierten Bedingungen. Die Analyse von Streudaten erlaubt dann Rückschlüsse auf die Wechselwirkung. Die berühmten Beschleuniger (bzw. Collider) -Experimente der Hochenergiephysik



sind z.B. Streuexperimente. Wie so oft bei solchen häufig genutzten Techniken hat die Streuphysik darum auch ihren ganz eigenen Jargon.

Zur Beschreibung der Streuung begeben wir uns ins Schwerpunktsystem. Die einlaufenden Teilchen bewegen sich auf den Ursprung zu, an dem sich das Streuzentrum oder Target befindet. Wir definieren die einlaufende Teilchenstromdichte

$$j = \frac{\# \text{Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}.$$

Jedes dieser Teilchen startet mit der Energie  $E = \frac{1}{2} v_\infty^2$ . Im Fall elastischer Streuung, auf den wir uns hier konzentrieren wollen, bleibt das auch so. Dennoch kann bei der Streuung Impuls übertragen werden und das teilchen z.B. die Richtung ändern. Wie sehr hängt vom Potenzial ab. Darum studieren wir den auslaufenden Teilchenstrom als Funktion des Raumwinkels, beschrieben durch das Raumwinkelement  $d\Omega = \frac{dA(\Omega)}{dr^2} = d\phi d\cos\theta$  wobei wir im zweiten Schritt Kugelkoordinaten eingesetzt haben. Die Zahl der Teilchen pro Zeiteinheit durch das Raumwinkelement kann beschrieben werden als  $d^2N(\Omega)/d\Omega dt$ . Dies ist natürlich der einlaufenden Teilchenstromdichte proportional. Wenn wir diese Größen ins Verhältnis setzen erhalten wir

$$\frac{d^2N}{j d\Omega dt} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

die rechte Seite hat klarerweise die Maßeinheit Fläche und heißt differentieller Wirkungsquerschnitt. Daraus können wir den totalen Wirkungsquerschnitt bestimmen

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Der Wirkungsquerschnitt kann interpretiert werden als die Größe einer harten Scheibe, die genau so viel des einlaufenden Strahls streut wie das Target.

Jetzt betrachten wir die Situation einer Zentralkraft. Wovon kann hier die Bahnkurve abhängen? Pragmatisch würden wir sagen: Davon, wie genau das einfallende Teilchen auf den Ursprung zielt. Andererseits wissen wir aus dem Studium von Zentralkraftproblemen, dass es auf den Drehimpuls ankommt. Dieses ist äquivalent: Wir nennen den Abstand von der  $z$ - Achse des einfallenden Teilchens den Stoßparameter  $s$  und der Drehimpuls ist dann  $L = \mu v_\infty s = \sqrt{2\mu E} s$ . In einem Zentralkraftproblem ist dann der Teilchenstrom, der in den gleichen Winkel gestreut wird (Skizze in der Vorlesung)

$$2\pi s j ds = \int_0^{2\pi} d\phi \int_\theta^{\theta+d\theta} d\theta' \sin\theta' j \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi j \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} d\theta$$

Damit können wir aus der Abhängigkeit zwischen Streuwinkel  $\theta$  und Stoßparameter  $s$  einen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt herleiten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{ds(\theta)}{d\theta} \right|.$$

Der Streuwinkel ist verwandt mit dem Azimutalwinkel der Bahnkurve (Zeichnung). Wir erhalten für ein Zentralkraftproblem

$$\theta(s) = \pi - 2 \int_{\rho_{\min}}^{\infty} d\rho \frac{L}{\rho^2} \frac{1}{\sqrt{2\mu(E - U(\rho)) - L^2/\rho^2}}.$$

Es macht Sinn, die erhaltenen Größen nach dem minimalen Radius zu parameterisieren. Dort ist  $\dot{\rho} = 0$  und

$$E = U(\rho_{\min}) + \frac{L^2}{2\mu\rho_{\min}^2} = U(\rho_{\min}) + E \frac{s^2}{\rho_{\min}^2}$$

also

$$1 = \frac{U(\rho_{\min})}{E} + \frac{s^2}{\rho_{\min}^2}.$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall der Streulösungen im Keplerproblem. Dieses Problem nennt man *Rutherfordstreuung*. Historisch wurde es von Ernest Rutherford zur Beschreibung der Streuung von Alphateilchen an Atomkernen genutzt. Wir betrachten darum den abstoßenden Fall des Keplerproblems,  $\alpha < 0$ . Hier gilt weiterhin die Kegelschnittgleichung von oben, mit  $\alpha < 0$ . Der Klarheit halber schreiben wir

$$\frac{|p|}{\rho} = -1 - \epsilon \cos \phi.$$

Am minimalen Radius ist die rechte Seite maximal, also  $\phi = \pi$  und wir haben

$$\frac{|p|}{\rho_{\min}} = \epsilon - 1.$$

Die linke Seite divergiert auf den Nullstellen der rechten, also wenn

$$\cos \phi_{\infty} = -\frac{1}{\epsilon}.$$

Diese Gleichung ist mehrdeutig und die unterschiedlichen Lösungen geben den Ein- und Ausfallwinkel an. Nehmen wir die Lösung auf dem Hauptast  $0 < \phi_{\infty} < \pi$  an und erinnern uns von oben an  $\phi_{\min} = \pi$  dann erhalten wir für den Ausfallwinkel die Gleichung  $\bar{\phi}_{\infty} = 2\pi - \phi_{\infty}$  und der gesamte Streuwinkel ist  $\phi_0 = 2(\pi - \phi_{\infty})$ . Damit ist

$$\cos \phi_0 = -\cos \phi_{\infty} = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{\alpha}\right)^2}}.$$

Zu Anwendung unserer Streuformel brauchen wir  $s(\phi_0)$ . Wir lösen auf

$$1 + \left(\frac{2Es}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi_0} \quad s = \frac{|\alpha|}{2E} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \phi_0}{\cos^2 \phi_0}} = \frac{|\alpha|}{2E} \tan \phi_0 = \frac{|\alpha|}{2E} \cot \frac{\theta}{2}.$$

Wobei wir im letzten Schritt den Streuwinkel eingeführt haben. Wir brauchen die Ableitung für den Wirkungsquerschnitt und erinnern uns erst einmal an

$$\cot' x = \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{\alpha^2 \cos \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{2}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \left( \frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Dies ist die Rutherford'sche Streuformel. Wir sehen, dass die Vorwärtsstreuung mit  $\theta \simeq 0$  am stärksten ist. Wenn wir den gesamten Streuquerschnitt berechnen wollen, ist der Integrand  $\propto \sin \theta / \sin^4 \theta / 2$ , divergiert also kubisch bei kleinen Winkeln - der Querschnitt ist unendlich. Dies passt dazu, dass die Reichweite des Potentials unendlich ist.

# Kapitel 4

## Starrer Körper

Dies bisher betrachteten Massenpunkte sind immer eine Näherung - die meisten mechanischen Objekte haben eine innere Ausdehnung. Wir entwickeln die Theorie solcher starrer Körper innerhalb des Lagrange-Formalismus aus der Theorie der Mechanik der Massenpunkte.

### 4.1 Zwangsbedingungen und Normalkoordinaten

Unser Körper ist aus Massenpunkten mit Massen  $m_\nu$  zusammengesetzt,  $\nu = 1 \dots N$ . Die Zwangsbedingung dass der betrachtete Körper starr ist legt alle Abstände fest: Es ist

$$|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu| = \text{const.}_{\mu\nu}.$$

Zählen wir zunächst einmal die Freiheitsgrade. Für  $N = 3$  haben wir zunächst  $3N = 9$  Koordinaten. Dazu kommen 3 Zwangsbedingungen für die drei auftretenden Abstände, d.h. es gibt  $9 - 3 = 6$  Freiheitsgrade. Wenn wir jetzt einen Massenpunkt hinzufügen, dann sind alle Abstände zu den vorhandenen drei festgelegt. Das legt (bis auf pathologische Spezialfälle mit linearer Abhängigkeit) die Koordinaten dieses Punktes bereits fest, d.h. es kommen keine Freiheitsgrade hinzu. Wir stellen fest, dass ein starrer Körper durch 6 Freiheitsgrade beschrieben werden kann.

Was ist eine praktikable Wahl dieser sechs unabhängigen Freiheitsgrade? Zunächst einmal geht es um die Lage des starren Körpers insgesamt. Diese können wir durch die Koordinaten des Schwerpunktes beschreiben, was drei der vorhandenen Freiheitsgrade verbraucht. Die anderen drei können benutzt werden um die Orientierung der Achsen des Körpers um diesen Schwerpunkt zu beschreiben - das sind dann zweckmäßigerweise Winkel.

Zur Beschreibung des starren Körpers führen wir darum zwei Koordinatensysteme ein. Das uns schon vertraute (Inertial-)System kennzeichnen wir als *raumfestes* Koordinatensystem, aufgespannt durch  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ . Zusätzlich definieren wir ein *Körperfestes* Koordinatensystem, das die Lage eines jeden Punktes

auf dem starren Körper relativ zum Schwerpunkt beschreibt und deren Koordinaten relativ zu diesem Schwerpunkt zeitunabhängig sind. Dies wird aufge-spannt durch  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ .

Wie können wir jetzt die Kinematik des starren Körpers effektiv beschreiben? Wir legen den Ursprung des körperfesten Systems in den Schwerpunkt, damit ist seine Geschwindigkeit

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}.$$

Ferner soll sich das körperfeste Koordinatensystem gegenüber dem raumfesten System mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\vec{\omega}(t)$  drehen. Was bedeutet das für Punkte auf dem starren Körper? Wir betrachten einen beliebigen Punkt  $P_\nu$  dort. Dieser hat den Ortsvektor  $\vec{r}_{\nu, \text{IS}}$  und damit den Ortsvektor relativ zum Schwerpunkt  $\vec{r}_\nu = \vec{r}_{\nu, \text{IS}} - \vec{R}$ . Damit ist seine Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{\nu, \text{IS}} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_\nu + \vec{R}) = \vec{V}(t) + \frac{d\vec{r}_\nu}{dt}.$$

Da der Körper starr ist, also alle Abstände fix sind, gibt es für den zweiten Beitrag, dem Vektor zwischen dem Ursprung des körperfesten Systems und dem Punkt nur die Möglichkeit sich zu drehen. Wir wissen schon, wie wir Drehungen parameterisieren und erhalten

$$\vec{v}_{\nu, \text{IS}} = \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu.$$

Wenn wir den Ursprung an einen anderen Punkt des Körpers legen, beschrieben durch  $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{a}$  dann liefert und dieselbe Argumentation dass  $\vec{v}_{\nu, \text{IS}} = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_\nu$  ist. Gleichsetzen dieser beider Ausdrücke liefert

$$\vec{V}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_\nu.$$

Variation der Aufpunkte  $\nu$  über den gesamten starren Körper liefert, dass diese Gleichung nur dann erfüllbar sein kann, wenn  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ . Damit ist der Vektor  $\vec{a}$ , der so wie oben gewählt nur im körperfesten System zeitunabhängig ist, eine Methode zum Übersetzen der Geschwindigkeiten

$$\vec{V}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu = \vec{V}'(t) + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{r}_\nu) \quad \vec{V}' = \vec{V} - \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Schlussendlich stellen wir uns die Frage, wie Winkelgeschwindigkeiten ad-diert werden: Wir haben die zwar wie Vektoren hingeschrieben, aber wie wir später sehen werden ist dies etwas mit Vorsicht zu genießen. Wir betrachten zwei Drehachsen mit infinitesimalen Drehungen  $d\vec{\phi}_{a/b} = \vec{\omega}_{a/b} dt$ . Wir drehen einen Vektor  $\vec{r}$  jetzt infinitesimal. Dadurch erhält er eine zusätzliche Komponente  $d\vec{r}_a = d\vec{\phi}_a \times \vec{r}$ . Dies drehen wir ein weiteres Mal und erhalten als Zusatzterm

$$d\vec{r}_b = d\vec{\phi}_b \times (\vec{r} + d\vec{r}_a) = d\vec{\phi}_b \times \vec{r} + O(d^2).$$

Damit haben wir insgesamt

$$d\vec{r} = d\vec{r}_a + d\vec{r}_b = (d\vec{\phi}_a + d\vec{\phi}_b) \times \vec{r} = (\vec{\omega}_a + \vec{\omega}_b) dt \times \vec{r}$$

also entsprechend einer Drehung um  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_b$ .

Wie stellen wir jetzt die Drehung zwischen den beiden Koordinatensystemen dar, welches sind die am günstigsten gewählten Winkel? Hierzu gibt es eine Zeichnung und ein dreidimensionales Beispiel in der Vorlesung zur Veranschaulichung der *Eulerwinkel*. Zunächst mal betrachten die den Schnitt der  $xy$  Koordinatenebene (des raumfesten) KS mit der  $x_1x_2$  Ebene (des körperfesten KS). Wenn diese nicht parallel sind handelt es sich um eine Gerade, die Knotenlinie  $K$ . Diese liegt in der  $xy$  Ebene und hat zur  $x$ - Achse den Winkel  $\phi$ . Außerdem liegt sie in der  $x_1x_2$  Ebene und hat zur  $x_1$  Achse den Winkel  $\psi$ . Die Neigung dieser Ebenen zueinander - formal der Winkel zwischen  $x_3$  und  $z$ - Achse ist dann der Winkel  $\theta$ . Man kann sich das klar machen, indem man das raumfeste und das körperfeste KS zunächst aufeinander legt. Dann dreht man das körperfeste um den Winkel  $\phi$ , kippt um die  $x_1$  Achse um  $\theta$  und dreht das KS-System noch einmal um  $\psi$ .

Wie drückt man nun die Winkelgeschwindigkeit in diesen Winkeln aus? Klarerweise ist der Einheitsvektor der Knotenlinie ausgedrückt durch die körperfesten Koordinaten.

$$\hat{e}_K = \cos \psi \hat{e}_1 - \sin \psi \hat{e}_2$$

Ferner ist die raumfeste  $z$ - Achse gegenüber der körperfesten Achse gekippt und verdreht, steht nach Konstruktion senkrecht auf der Knotenlinie und schließt mit der  $x_3$ -Achse den Winkel  $\theta$  ein

$$\hat{e}_z = \sin \theta \sin \psi \hat{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3.$$

Eine beliebige Drehung des Körpers kann jetzt beschrieben werden durch die Änderung der Eulerwinkel

$$\begin{aligned} d\vec{\phi} = \vec{\omega} dt &= (\omega_\theta \hat{e}_K + \omega_\phi \hat{e}_z + \omega_\psi \hat{e}_3) dt. \\ &= \left( \dot{\theta} \hat{e}_K + \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\psi} \hat{e}_3 \right) dt \end{aligned}$$

Mit den gerade gewonnenen Darstellungen der Einheitsvektoren können wir die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit z.B. entlang der körperfesten Achsen als  $\omega_i = \hat{e}_i \cdot \vec{\omega}$  bestimmen zu

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

## 4.2 Kinetische Energie und Drehimpuls eines starren Körpers

Wir wollen jetzt wieder den Lagrangeformalismus zur Anwendung bringen. Dazu berechnen wir zunächst die kinetische Energie des Objektes

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{v}_{\nu, \text{IS}}^2 = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})^2 \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{V}^2 + 2 \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}) + \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})^2. \end{aligned}$$

Wir erste Term entspricht der kinetischen Energie der Translation. Den zweiten Term schreiben wir um mit der Spatproduktformel als

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}) = \left( \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} \right) \cdot (\vec{V} \times \vec{\omega}).$$

Die Summe ist genau die Koordinate des Schwerpunkts mal der Gesamtmasse. Wenn wir den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers legen, dann verschwindet dieser Term. Wir schauen uns nachher an was passiert, wenn wir das Koordinatensystem nicht so wählen.

Der dritte Term gibt die kinetische Energie der reinen Rotation an. Wir nutzen den Satz des Pythagoras und schreiben um

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})^2 &= \sum_{\nu} m_{\nu} \omega^2 r_{\nu}^2 (1 - \sin^2 \angle \vec{\omega}, \vec{r}_{\nu}) \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu} (\omega^2 r_{\nu}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\nu})^2) \\ &= \sum_{\nu, i, k} m_{\nu} (\omega_i \omega_k r_{\nu}^2 \delta_{ik} - \omega_i r_{\nu, i} \omega_k r_{\nu, k}) \\ &= \sum_{ik} \omega_i \left[ \sum_{\nu} m_{\nu} (r_{\nu}^2 \delta_{ik} - r_{\nu, i} r_{\nu, k}) \right] \omega_k. \end{aligned}$$

Wir erkennen diesen Ausdruck als quadratische Form  $T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega}$ . Die Matrix  $\Theta$  mit Einträgen

$$\Theta_{ik} = \sum_{\nu} m_{\nu} (r_{\nu}^2 \delta_{ik} - r_{\nu, i} r_{\nu, k})$$

heißt *Trägheitstensor* des betrachteten Körpers.

Analog können wir den Drehimpuls berechnen

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_{\nu} \times \dot{\vec{r}}_{\nu}) \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}). \end{aligned}$$

Mit der Formel für das dreifache Vektorprodukt erhalten wir

$$\vec{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} r_{\nu}^2 - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}))$$

Das heißt wir finden für die Komponente  $j$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} L_j &= \sum_{\nu} m_{\nu} (\omega_j r^2 - r_j (\vec{\omega} \cdot \vec{r})) \\ &= \sum_{\nu, k} m_{\nu} (r^2 \delta_{kj} \omega_k - r_j r_k \omega_k) \\ &= \sum_k \sum_{\nu} m_{\nu} (r_{\nu}^2 \delta_{jk} - r_{\nu, j} r_{\nu, k}) \omega_k = (\Theta \vec{\omega})_j. \end{aligned}$$

Damit bestimmt der Trägheitstensor auch den Drehimpuls gemäß  $\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$ .

Was folgt hieraus? Wir sehen anhand der Definition, dass der Trägheitstensor symmetrisch ist,  $\Theta_{ik} = \Theta_{ki}$ . Damit ist er diagonalisierbar, und zwar mit einer orthogonalen Transformation. Die orthogonale Basis, die ihn diagonalisiert, definiert die *Hauptachsen* des starren Körpers. Nur, wenn die Winkelgeschwindigkeit ein Eigenvektor des Trägheitstensors ist, sind  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  parallel. Bei einem kräftefreien Kreisel führt dies zum Phänomen der *Nutation*: Der Drehimpuls ist erhalten, die Drehachse aber nicht, d.h. sie umkreist den Drehimpuls auf einem Kegelmantel. Wir gehen später auf Kreiseldynamik noch genauer ein.

Abschließend betrachten wir den Trägheitstensor in Hauptachsenform, d.h. wir schauen seine Diagonalelemente an

$$\Theta_{ii} = \sum_{\nu} m_{\nu} (r_{\nu}^2 - r_{\nu, i}^2) = \sum_{\nu} \sum_{j \neq i} m_{\nu} r_{\nu, j}^2.$$

Die rechte Seite ist nichtnegativ, also sind die Eigenwerte nichtnegativ - der Trägheitstensor ist eine positiv semidefinite Matrix.

### 4.3 Vektoren und Tensoren

Die Elemente des Trägheitsmoments formen eine Matrix, die wir *Trägheitstensor* nennen. Für den Zweck dieser Vorlesung können Sie stattdessen stets *Trägheitsmatrix* lesen. Als Vorbereitung auf weitere Vorlesungen (insbesondere die Behandlung der speziellen Relativitätstheorie in der TP 2) wollen wir uns aber mit den Begriffen von Vektor und Tensor etwas eingehender auseinandersetzen.

In der linearen Algebra haben wir gelernt, dass die Elemente eines abgeschlossenen linearen Raumes (eines *Vektorraumes*) Vektoren genannt werden. Wir können sie durch die Entwicklungskoeffizienten in einer gegebenen Basis beschreiben (kanonischer Isomorphismus) und lineare Abbildungen entsprechend als Matrizen. Diese Definition hat den Vorteil, dass sie auch auf Räume von Funktionen angewendet werden kann, die mit den Ergebnissen der linearen Algebra strukturiert werden können.



Was wir hier nutzen ist der Vektorbegriff einer anderen mathematischen Disziplin, der *Differenzialgeometrie*. Er hat mit dem bisherigen Vektorbegriff gemein, dass Vektoren Koordinatentransformationen unterworfen werden können, insbesondere der Ortsvektor

$$r'_i = \sum_{ij} \alpha_{ij} r_j$$

Wir nennen jede physikalische Größe, die sich so unter linearen Abbildungen verhält einen Vektor - z.B. die Geschwindigkeit und den Impuls eines Punktteilchens. Wenn wir jetzt eine Matrix  $T_{ij}$  haben, dann nennen wir die einen Tensor (zweiter Stufe) genau dann wenn bei einer Koordinatentransformation sich beide Indizes so transformieren wie die eines Vektors, also

$$T'_{ij} = \sum_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}.$$

Entsprechend können wir Tensoren höherer Stufe mit beliebig vielen Indizes definieren. Eine Größe, die sich unter Koordinatentransformationen überhaupt nicht ändert, nennen wir einen *Skalar*.

In der klassischen Mechanik interessieren wir uns für Vektor- und Tensorcharakter unter Gallileitransformationen. Hier ist z.B. der Abstand  $\vec{r}^2$  ein Skalar.

Als Beispiel betrachten wir den oben definierten Trägheitstensor und wollen überprüfen, ob er ein Tensor unter rein räumlichen Gallileitransformationen ist. Diese rein räumlichen Transformationen, insbesondere Drehungen und Spiegelungen, sind alle längenerhaltend und symmetrisch. Der zweite Term besteht einfach aus Vektorkomponenten und transformiert sich dementsprechend. Der erste Term  $r^2 \delta_{ik}$  besteht aus einem Skalar und dem Kroneckerdelta. Wir überprüfen die Transformationsregel für das Kroneckerdelta

$$\sum_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl} = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{kj} = \delta_{ij}$$

hier haben wir erst die Orthogonalität der Transformationsmatrix genutzt.

Schauen wir uns an, wie sich das Levi-Civita-Symbol transformiert

$$\epsilon'_{ijk} = \sum_{mln} \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} \epsilon_{lmn}.$$

Wir sehen, dass das Ergebnis auch wieder keine Diagonalelemente hat. Setzen wir z.B.  $i = j$  dann haben wir

$$\epsilon'_{iik} = \sum_{mln} \alpha_{il} \alpha_{im} \alpha_{kn} \epsilon_{lmn} = \sum_n \alpha_{kn} \sum_{lm} \alpha_{il} \alpha_{im} \epsilon_{lmn}$$

und für jeden nichtverschwindenden Term in der inneren Summe kommt auch sein negatives vor, also verschwindet das. Berechnen wir jetzt einen vollständig außerdiagonalen Term

$$\epsilon'_{123} = \sum_{mln} \alpha_{1l} \alpha_{2m} \alpha_{3n} \epsilon_{lmn} = \det \alpha.$$

Dies lässt sich analog für alle Einträge zeigen. Damit ist das Levi-Civita-Symbol invariant unter Transformationen mit Determinante 1. Orthogonale Transformationen können auch Determinante -1 haben, z.B. Spiegelungen. Ein solches Objekt nennt man Pseudotensor.

Ein interessanter Fall ist das Vektorprodukt, wie es z.B. im Drehimpuls auftritt  $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ . Wir zeichnen dies gerne als Vektor, es kennzeichnet allerdings die Drehachse. Wählen wir die Punktspiegelung als Transformation  $\alpha_{ij} = -\delta_{ij}$  dann ist  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}} \rightarrow -\dot{\vec{r}}$  aber  $\vec{L} \rightarrow \vec{L}$ . Damit ist der Drehimpuls im Sinne der Differentialgeometrie kein Vektor. Was ist es dann? Wir definieren

$$L_{ij} = r_i \dot{r}_j - r_j \dot{r}_i$$

als antisymmetrische Matrix,  $L_{ji} = -L_{ij}$  und sehen, dass es sich um einen Tensor zweiter Stufe handelt. Aufgrund der Eigenheit (in drei Dimensionen), dass eine solche Matrix genau drei unabhängige Einträge hat, schreiben wir die eben manchmal als Vektor. In manchen Büchern wird hier von Axialvektoren gesprochen.

#### 4.4 Eulersche Bewegungsgleichungen und Stabilität des kräftefreien Kreisels

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen beruhen auf dem Drehmoment, das die äußeren Kräfte  $\vec{F}_\nu$  auf die Elemente des Körpers ausüben

$$\vec{M} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu.$$

Sie ähneln den normalen Newtonschen Gleichungen für einen Massenpunkt und lauten

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \vec{L} = \Theta \vec{\omega}.$$

Zum Beweis rechnen wir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{M}.$$

Was bedeutet das für die Drehachse? Der Trägheitstensor ist konstant im körperfesten Koordinatensystem. Wir schreiben aus

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} (\Theta \vec{\omega}) = \Theta \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\Theta \vec{\omega}).$$

Wir gehen jetzt davon aus, dass wir im körperfesten System die Hauptachsenform nutzen, d.h. der Trägheitstensor ist diagonal. Dann haben wir ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) &= M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\Theta_1 - \Theta_3) &= M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\Theta_2 - \Theta_1) &= M_3. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind erstaunlich komplex - z.B. ein ist ein konstantes Drehmoment im Laborsystem nicht konstant im körperfesten System. Die Wirkung von Drehmoment schauen wir uns im nächsten Kapitel an - hier betrachten wir den kräftefreien Kreisel.

#### 4.4.1 Stabilität des asymmetrischen kräftefreien Kreisels

Der kräftefreie Kreisel ist gekennzeichnet durch  $\vec{M} = 0$ . Wir nehmen einen unsymmetrischen Kreisel an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ordnen wir die Eigenwerte als  $\Theta_1 > \Theta_2 > \Theta_3$ . Wir nehmen an, dass der Kreisel näherungsweise um die Achse größter Trägheit rotiert, d.h.  $\omega_1 \equiv \omega_0$  und  $\omega_{2/3}/\omega_0 \in O(\delta)$ ,  $\delta \ll 1$ .

Die erste Eulergleichung liest sich einfach

$$\Theta_1 \dot{\omega}_0 + O(\delta^2) = 0$$

d.h. die große Komponente bleibt erhalten. Wir betrachten die kleinen Komponenten

$$\begin{aligned}\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_0 \omega_3 &= 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_0 \omega_2 &= 0.\end{aligned}$$

Wir differenzieren die erste dieser Gleichungen, setzen die zweite ein, und sortieren um zu

$$\ddot{\omega}_2 + \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2 \Theta_3} \omega_0^2 \omega_2 = 0.$$

Da  $\Theta_1$  die Achse des größten Trägheitsmoments ist, ist dies Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz  $\omega_0 f$  wobei  $f$  ein reeler Faktor ist. Analog finden wir für  $\omega_3$

$$\ddot{\omega}_3 + \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_1)}{\Theta_2 \Theta_3} \omega_0^2 \omega_3 = 0.$$

Damit kreist die Drehachse um die ursprüngliche Achse, kleine Auslenkungen bleiben klein, die Achse bleibt stabil. Dies würde auch gelten für die Achse mit dem geringsten Trägheitsmoment (alle Klammern haben das umgekehrte Vorzeichen, die Produkte bleiben aber positiv). Die Achse mittleren Trägheitsmoments ist allerdings instabil.

#### 4.4.2 Nutation des symmetrischen kräftefreien Kreisels

Wir nehmen jetzt an  $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$  und wollen die Drehung um eine beliebige Achse starten. Die  $r_3$ -Achse nennen wir auch *Figurenachse*, da der Kreisel unter Rotation um diese Achse invariant ist. Die dritte Eulergleichung im kräftefreien Fall ist dann

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \omega_3 = \text{const.} \equiv \omega_0.$$

Die verbleibenden Eulergleichungen formen dann ein gekoppeltes Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_0 \omega_2 &= 0 \\ \Theta_1 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_0 \omega_3 &= 0\end{aligned}$$

das wegen der Konstanz von  $\omega_0$  linear ist. Wir setzen  $\Omega = \omega_0(\Theta_1 - \Theta_3)/\Theta_1$  und differenzieren wieder die erste Gleichung zu

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist  $\omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \phi_0)$  wobei die Integrationskonstanten  $a$  und  $\phi$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Durch Einsetzen in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen erhalten wir  $\omega_2(t) = a \cos(\Omega t + \phi_0)$ . Damit kreist die Drehachse um die Figurenachse (im körperfesten System) bzw. die Figurenachse um die Drehachse. Die Bahnkurve der Drehachse überstreicht einen Kegel, den *Polkegel*. Die Frequenz dieser Nutation hängt sowohl vom Grad der Asymmetrie des Kreisels ab, als auch von der Frequenz der Drehung um die Figurenachse.

Wie sieht diese Bewegung im für den Beobachter im raumfesten System aus? Dazu beschaffen wir uns den Drehimpuls, denn wir wissen aufgrund der Kräftefreiheit, dass dieses zeitlich unverändert ist. Wir drücken es in Polarkoordinaten aus

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_1 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Da die  $r_3$  Komponente erhalten ist, folgt automatisch  $\theta = \text{const.}$  Wenn wir jetzt noch die Lösung für  $\omega_{1/2}(t)$  mitnehmen, erhalten wir  $\tan \theta = a \Theta_1 / \omega_3 \Theta_3$  also eine Kombination aus Trägheitsmomenten und Anfangsbedingungen. Dies schränkt die Bewegung der Drehachse wiederum auf einen Kegel ein, den *Präzessionskegel*. Insgesamt bewegt sich die Figurenachse also auf dem Polkegel, der auf dem Präzessionskegel abrollt - vornehm gesagt führt sie Epizykel aus, landläufig gesagt eiert sie. Wir können dies durch Eulerwinkel darstellen als  $\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{e}_z + \psi \hat{e}_3$  mit  $\psi(t) = \Omega t + \phi_0$  und  $\dot{\phi} = \frac{a t}{\sin \theta_0} + \phi_0$ .

## 4.5 Präzession und Nutation des schweren symmetrischen Kreisels

Nachdem bereits die Bewegung eines kräftefreien Kreisels einiges an Struktur preisgibt brauchen wir jetzt den Lagrangeformalismus zur Behandlung eines Kreisels mit angreifender Gewichtskraft. Das Phänomen das wir beschreiben werden, die Präzession, kennen Sie bereits aus der Experimentalphysik: Sie stabilisiert Fahrräder und sorgt für das Aufrichten von Kreiseln. Wir gehen davon aus, dass der Kiesel abgestützt ist, d.h. die kinetische Energie enthält nur die

Rotation,  $\mathcal{L} = T_{\text{rot}} - U$ . Wir entwickeln in Eulerwinkeln

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2) \\ &= \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{\Theta_2}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned}$$

Wir postulieren von jetzt an einen Kreisel, der um die  $x_3$  Achse symmetrisch ist - dann liegt auch der Schwerpunkt auf dieser Achse. Bei Aufstützung auf der Symmetrieachse ist die potenzielle Energie ist  $U = -mgs \cos \theta$  wobei  $\theta$  der Abstand vom Aufstützungspunkt zum Schwerpunkt ist. Wir sehen sofort, dass  $t$  und  $\phi$  zyklisch sind. Ferner erlaubt uns die Annahme eines symmetrischen Kreisels auch  $\Theta_1 = \Theta_2$  zu folgern und es vereinfacht sich

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

und wir haben mit  $\psi$  eine weitere zyklische Koordinate. Dies erlaubt uns zunächst zu folgern, dass die Energie erhalten ist mit

$$E = \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgs \cos \theta.$$

Die beiden zyklischen Winkel führen zur Erhaltung der  $z$ -Komponente des Drehimpulses

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \Theta_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \cos^2 \theta)$$

sowie zur Erhaltung der Drehimpulskomponente entlang der Figurenachse

$$L_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta).$$

Wir nutzen diese Beziehungen, um die Energie nur noch als Funktion von  $\theta$  und  $\dot{\theta}$  zu schreiben. Dazu formen wir um

$$\frac{\Theta_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 = \frac{L_3^2}{2\Theta_3}$$

sowie  $L_z - L_3 \cos \theta = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta$  was uns erlaubt umzuformulieren

$$\frac{\Theta_1}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\Theta_1 \sin^2 \theta}.$$

Wir haben also Energieerhaltung der Form  $E = \frac{\Theta_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta)$  mit

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\Theta_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} - mgs \cos \theta.$$

Dieses Potenzial ist definiert für  $\theta \in [0, \pi]$  und aufgrund des Nenners des ersten Terms divergiert es (bis auf den pathologischen Fall dass  $L_3 = \pm L_z$

ist) an beiden Enden des Intervalles. Man kann sich leicht überzeugen, dass es dazwischen ein Minimum aufweist. Für jeden physikalisch zulässigen Wert der Gesamtenergie lassen sich also zwei Lösungen von  $U_{\text{eff}} = E$  finden und es oszilliert der Winkel  $\theta$  zwischen diesen beiden Werten - der Winkel zwischen Figurenachse und raumfester  $z$ - Achse. Zusätzlich zu dieser Nutation haben wir Präzession mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{\Theta_1 \sin^2 \theta}.$$

Auch  $\dot{\psi}$  verschwindet nicht und ist zeitlich variabel. Dies wirkt sich als Beschleunigung bzw. Verzögerung der Rotation um die Symmetrieachse aus. Ein realer Kreisel ist zusätzlich noch Reibung ausgesetzt, d.h. die Drehimpulswerte sinken und die Nutation wird stärker, während der Kreisel langsamer wird. Das dürften Sie auch schon einmal gesehen haben.

# Kapitel 5

## Kleine Schwingungen

Den harmonischen Oszillator haben Sie bereits im ersten Semester kennen gelernt und verschiedene Lösungsstrategien gelernt. Dies wollen wir vertiefen und auf den Fall von schwingenden Systemen mit vielen Freiheitsgraden ausbauen. Dort werden wir auch einen ersten Eindruck davon bekommen, warum harmonische Oszillatoren in der Physik (auch in der Forschung) so eine zentrale Rolle spielen.

### 5.1 Wiederholung: Eindimensionaler freier Harmonischer Oszillator

In der Experimentalphysik im ersten Semester haben Sie gelernt, dass der harmonische Oszillator gekennzeichnet ist durch ein rücktreibendes, lineares Kraftgesetz in seiner Auslenkung  $x$

$$m\ddot{x} = F = -Kx \quad K > 0.$$

Wir können die Kraftkonstante  $K$  ersetzen durch  $K = m\omega^2$  und erhalten

$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung (bzw. ein System aus zwei Gleichungen erster Ordnung) mit konstanten Koeffizienten. Seine Lösung kann geschrieben werden über den komplexen Ansatz

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] \quad z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

wie wir leicht durch Einsetzen testen können. Der komplexe Vorfaktor entspricht zwei Integrationskonstanten. Wir können einerseits in Polarkoordinaten schreiben  $z_0 = A e^{i\phi}$  und finden als Lösung  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . Andererseits können wir kartesische Koordinaten nutzen mit  $z = u + iv$ . Wir sehen dann dass  $x(0) = u$  und  $\dot{x}(0) = -\omega v$  ist und schreiben

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t.$$

Natürlich ist kein physikalisches System im strengen Sinn ein harmonischer Oszillator - z.B. gilt das lineare Kraftgesetz bei einer Feder nur, wenn die Auslenkung nicht zu groß ist und zu irreversiblen Verformungen führen könnte. Für ein eindimensionales Teilchen mit Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x)$$

betrachten wir kräftefreie Punkte  $\{x_i\}$  also Punkte mit  $V'(x_i) = 0$ . Die Taylorentwicklung des Potentials um einen dieser Punkte ist damit  $V(x) = V(x_i) + \frac{V''(x_i)}{2} (x - x_i)^2 + O((\delta x)^3)$ . Wir können also die Lagrangefunktion in der neuen Variable  $\delta x = x - x_i$  umschreiben zu  $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 - \frac{K}{2} \delta x^2$  wobei wir die physikalisch irrelevante Konstante beiseitegelassen haben und  $K \equiv V''(x_i)$  definiert. Damit haben wir näherungsweise, für kleine Auslenkungen, einen harmonischen Oszillator, solange  $V''(x_i) > 0$  ist. Diese Einschränkung ist nicht nur Pedanterie - andernfalls wäre die Bewegung ungebunden, d.h. schon bei einer kleinen Auslenkung würde das Teilchen ins Unendliche gezogen und die Näherungen eines kleinen  $\delta x$  wäre nicht mehr konsistent. Einen solchen Punkt  $x_i$ , der kräftefrei ist und um den herum kleine Auslenkungen des Teilchens gebunden sind, heißt *stabiler Punkt*.

## 5.2 Mehrdimensionale Stabilität und gekoppelte Oszillatoren

Betrachten wir jetzt ein System mit  $N$  Freiheitsgraden und einer potenziellen Energie  $V(\{q_i\})$ . Auf Eigenheiten bei der kinetischen Energie gehen wir später ein. Auch hier betrachten wir wieder Punkte  $\{q_i^{(j)}\}$  die kräftefrei sind, also

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q^{(j)}} = 0.$$

Die Taylorentwicklung um diesen kräftefreien Punkt ist, mit  $\delta q_i^{(j)} = q_i - q_i^{(j)}$

$$V(\{q_i\}) = V(\{q_i^{(j)}\}) + \frac{1}{2} (\delta q_1 \dots \delta q_N) H^{(j)} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_N \end{pmatrix} + O(\delta q^3).$$

Hier haben wir die Koeffizienten der zweiten Ordnung der Taylorentwicklung in der Hessematrix

$$H^{(j)} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{ij} \Big|_{q^{(j)}}$$

also der Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen angeschrieben. Damit auch hier die Kraft bei kleinen Auslenkungen  $\delta q^{(j)}$  rücktreibend wirkt muss sichergestellt werden, dass sich egal in welcher Kombination das Potenzial erhöht, dass



also

$$(\delta q_1 \dots \delta q_N) \mathbf{H}^{(j)} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_N \end{pmatrix} > 0$$

ist. Dies ist nicht anderes als die Bedingung, dass die Hessematrix positiv definit ist. Da sie symmetrisch ist, ist sie diagonalisierbar, also ist dies wiederum äquivalent dazu, dass alle Eigenwerte positiv sind. Von nun an schreiben wir

$$\delta \vec{q} = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_N \end{pmatrix}$$

wobei wir uns merken, dass dieser Vektor  $N$  Einträge hat, nicht zwingend genau drei. Wie sieht die Bewegung um so einen stabilen Punkt herum aus? Wir nähern die Lagrangefunktion unter Nutzung der Notation

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\simeq \mathcal{L}_{\text{HO}}(\{\delta \dot{q}\}, \{\delta q\}) = \sum_i \frac{m_i}{2} \delta \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \delta \vec{q}^T \mathbf{H}^{(j)} \delta \vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \left( \delta \vec{q}^T \mathbf{M} \delta \dot{\vec{q}} + \delta \vec{q}^T \mathbf{H}^{(j)} \delta \vec{q} \right)_i \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  ist. Unser Ziel ist es, Lagrangefunktion als Summe unabhängiger Terme zu schreiben. Dies würde uns gelingen, wenn wir es schaffen,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{H}$  gleichzeitig zu diagonalisieren. Genauer benötigen wir Vektoren  $\vec{x}_i$  so, dass

$$\mathbf{H} \vec{x}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \vec{x}_i \quad (5.1)$$

ist. Dies ist eine verallgemeinerte Eigenwertgleichung. In der Tat können wir definieren  $\mathbf{H}' = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{M}^{-1/2}$ . Diese Matrix ist symmetrisch, denn

$$\mathbf{H}'^T = \left( \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{M}^{-1/2} \right)^T = \mathbf{M}^{-1/2T} \mathbf{H}^T \mathbf{M}^{-1/2T} = \mathbf{H}$$

weil alle drei Matrizen symmetrisch sind. Damit ist  $\mathbf{H}'$  diagonalisierbar, d.h. es existiert ein vollständiger Satz Eigenvektoren und Eigenwerte charakterisiert durch

$$\mathbf{H}' \vec{x}'_i = K_i \vec{x}'_i.$$

Wir setzen dann  $\vec{x}_i = \mathbf{M}^{-1/2} \vec{x}'_i$ . Es ist dann

$$\mathbf{H} \vec{x}_i = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{H}' \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{M}^{-1/2} \vec{x}'_i = \mathbf{M}^{1/2} K_i \vec{x}'_i = K_i \mathbf{M} \vec{x}_i.$$

Damit ist  $\vec{x}_i$  eine Lösung der verallgemeinerten Eigenwertgleichung (5.1) mit dem Eigenwert  $K_i$ . Analog können wir zeigen, dass  $K_i > 0$  ist und damit  $\omega_i = \sqrt{K_i}$  reell ist. Wir können jetzt die Lagrangefunktionen in die Basis der Normalmoden transformieren, d.h. wir schreiben

$$\vec{q} = \sum a_i \vec{x}_i$$

und erhalten

$$\mathcal{L}(\{\bar{a}\}, \{\dot{\bar{a}}\}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{a}_i^2 - \omega_i^2 a_i^2) \equiv \sum \mathcal{L}_i(a_i, \dot{a}_i).$$

Damit ist dies eine Summe von unabhängigen harmonischen Oszillatoren, die wir separat lösen können. Dies nennen wir *Normalmodenzerlegung*.

## 5.3 Beispiele für gekoppelte Oszillatoren

### 5.3.1 Doppelpendel

Wir betrachten zwei harmonische Oszillatoren mit ebenfalls harmonischer Kopplung

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} \omega_1^2 x_1^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 x_2^2 - g^2 x_1 x_2.$$

Das System ist kräftefrei bei  $x_1 = x_2 = 0$  mit Hessematrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & g^2 \\ g^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

Da die Massen gleich sind, müssen wir lediglich diese Matrix diagonalisieren um die Normalmoden zu finden. Wir führen die RMS-Frequenz  $\omega_{\text{RMS}}^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2) / 2$  und den halben Unterschied in den quadrierten Frequenzen  $\delta\omega^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) / 2$  ein. Damit haben wir

$$\mathbf{H} = \omega_{\text{RMS}}^2 \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \delta\omega^2 & g^2 \\ g^2 & -\delta\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Da die Einheitsmatrix vorne in jeder Basis die Einheitsmatrix ist, können wir uns auf den zweiten Term konzentrieren. Das charakteristische Polynom ist

$$Z(\lambda) = \lambda^2 - \delta\omega^4 - g^4 \quad \lambda = \pm \sqrt{\delta\omega^4 + g^4}$$

und somit die Eigenfrequenzen

$$\omega_{1/2} = \sqrt{\omega_{\text{RMS}}^2 \pm \sqrt{\delta\omega^4 + g^4}}.$$

Die Berechnung der Eigenmoden ist ein wenig mühevoll. Wir setzen

$$\tan \theta = \frac{g^2}{\delta\omega^2}.$$

Damit sind die Eigenmoden gegeben durch die Eigenvektoren des Drehkästchens

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

also den Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \mp 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \mp 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \mp 1 & 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & -\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Für das obere Vorzeichen reduziert sich das zu

$$\begin{pmatrix} -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & -2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Eigenmode beschrieben durch den Eigenvektor

$$\vec{q}_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Die analoge Rechnung für das untere Vorzeichen liefert

$$\vec{q}_- = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Was lernen wir hier? Wir studieren zwei Spezialfälle. Im Resonanzfall,  $\omega_1 = \omega_2$  also  $\delta\omega^2 = 0$  erhalten wir wegen  $\theta = \pi/2$

$$\omega_{1/2} = \sqrt{\omega_{RMS}^2 \pm g^2} \quad \vec{q}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir parallel bzw. gegenläufige Moden, deren Frequenzen sich um die Kopplungsstärke unterscheiden. Hier haben die parallel-laufenden Moden die höhere Frequenz, da bei ihnen die Kopplung tatsächlich die Frequenz erhöht - das hängt aber von Details der Kopplung ab (siehe Übungsblatt). Interessanterweise hängen die Eigenmoden nicht von  $\omega_{RMS}^2$  ab - da die Frequenzen gleich sind reicht auch eine sehr schwache Kopplung aus, um diese Schwingungsmoden zu bevorzugen. Allerdings muss man für kleines  $g$  die Resonanzbedingung sehr gut treffen.

Im stark verstimmtten Fall ist  $\theta \simeq g^2/\delta\omega^2 \ll 1$ . Wir entwickeln die Wurzel mittels der binomischen Reihe

$$\lambda = \pm \sqrt{\delta\omega^4 + g^4} = \pm \delta\omega^2 \left( 1 + \frac{g^4}{\delta\omega^4} \right)^{1/2} \simeq \pm \left( \delta\omega^2 + \frac{g^4}{2\delta\omega^2} \right) + O\left( \left( \frac{g^2}{\delta\omega^2} \right)^3 \right).$$

Damit sind die Frequenzen durch die Kopplung nur noch leicht verstimmt. Entsprechend sind die Eigenmoden auch nahezu ungestört

$$\vec{q}_+ \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g^2}{2\delta\omega^2} \end{pmatrix} \quad \vec{q}_- \simeq \begin{pmatrix} -\frac{g^2}{2\delta\omega^2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 5.3.2 Lineare Kette

Wir betrachten einen Ring aus  $N$  gleichen Massen, die durch identische Federn gekoppelt sind. Die Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 - \frac{K}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i+1})^2$$

wobei wir  $x_1 \equiv x_{N+1}$  nehmen um den Ring zu schließen (dies heißt auch *periodische Randbedingung*). Auch hier sind die Massen identisch und wir müssen die Hessematrix diagonalisieren

$$\mathbf{H} = K \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine solche Matrix ist ein Spezialfall einer *Bandmatrix*. Da nur zwei Nebendiagonalen von null verschieden sind, nennt man dies auch eine *Tridiagonalmatrix* sind, und da diese konstant sind ist dies eine *Tridiagonal-Toeplitzmatrix*. Die Eigenmoden dieser Matrix sind bekannt. Man kann sich die Form ihres Ansatzes auch dadurch motivieren, dass das System eine diskrete Symmetrie hat - es ändert sich nichts an der Physik, wenn man das System um einen Massenpunkt dreht / die Massenpunkte umnummeriert. Wir versuchen

$$\vec{q}_k = (e^{ikn})_{n=1\dots n}$$

als Eigenvektoren. Anwendung der Zeile  $2 \leq n \leq N-1$  von  $\mathbf{H}$  ergibt

$$e^{ikn} (2 - e^{ik} - e^{-ik}) = 2e^{ikn} (1 - \cos k).$$

Anwendung der ersten Zeile liefert

$$2e^{ik} - e^{2ik} - e^{ikN} = e^{ik} (2 - e^{ik} - e^{ikN} e^{-ik})$$

und Anwendung der letzten Zeile liefert

$$2e^{ikN} - e^{ik(N-1)} - e^{ik} = e^{ikN} (2 - e^{-ik} - e^{-ikN} e^{ik}).$$

Vergleich mit dem ursprünglichen Vektor liefert, dass dieser ein Eigenvektor zum Eigenwert  $2(1 - \cos k)$  ist, genau dann wenn  $e^{ikN} = 1$  ist. Das liefert dann

$$k = 0, \frac{2\pi}{N}, \dots, 2\pi \frac{N-1}{N}$$

und mithin  $N$  verschiedene Eigenvektoren mit je zweifach entarteten Eigenwerten - so ist die Matrix diagonalisiert. Wie Sie sehen brechen wir die Folge an

Eigenwerten bei  $2\pi ab$ , denn für die Einträge im Eigenvektor  $e^{ikn}$  ändert sich dann nichts mehr. Dieses Phänomen wird Sie in der Festkörperphysik noch eingehender beschäftigen. Die Eigenfrequenzen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \sqrt{1 - \cos 2\pi \frac{n}{N}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} \left| \sin \frac{\pi n}{N} \right|$$

starten zunächst linear, nähern sich aber um die  $N/2$  einer Konstanten. Dieses Beispiel wird uns später noch bei der Diskussion von Wellen in kontinuierlichen Systemen weiter beschäftigen.

# Kapitel 6

## Hamiltonformalismus

Bisher haben wir uns auf die Formalisierung der Klassischen Mechanik mittels des Lagrangeformalismus konzentriert. Dieser bietet den großen Vorteil, dass er Zwangsbedingungen auf natürliche Art und Weise realisiert und mit seinem sehr transparenten Variationsverfahren eine enge Verknüpfung zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen darstellt. Es ist durchaus möglich, mittels des Lagrangeformalismus auch die Quantenmechanik zu erschließen, allerdings ist das nicht der konventionelle (und in der TP 3 gelehrt) Zugang. Außerdem sind wir bei der Klasse der Koordinatentransformationen im Lagrangeformalismus ein wenig eingeschränkt - wir können keine dynamischen Symmetrietransformationen durchführen, also solche, die verallgemeinerte Koordinaten und Geschwindigkeiten miteinander verbinden. Auch der Zugang zur statistischen Mechanik ist direkt über den Lagrangeformalismus bestenfalls unnötig mühevoll.

In diesem Kapitel wollen wir darum einen zum Lagrangeformalismus äquivalenten Zugang entwickeln: Den Hamiltonformalismus.

### 6.1 Hamiltonfunktion und kanonische Gleichungen

Die Hamiltonfunktion haben wir im Prinzip schon mit dem Lagrangeformalismus kennengelernt. Gegeben eine Lagrangefunktion  $\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ ,  $i = 1 \dots N$  können wir die verallgemeinerte Impulse

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$$

bestimmen. Diese Gleichungen können wir im Prinzip auflösen, so dass wir  $\dot{q}_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$  bestimmen können - die verallgemeinerten Geschwindigkeiten als Funktion der Koordinaten und Impulse. Damit können wir die Hamiltonfunktion schreiben als

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i \dot{q}_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t) p_i - \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t)\}, t).$$

Als Beispiel können wir das freie Teilchen in Polarkoordinaten betrachten. Dieses hat

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) \quad p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\phi = m\rho^2 \dot{\phi}$$

und damit

$$H(\rho, \phi, p_\rho, p_\phi) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2}.$$

Welche Bedeutung haben die partiellen Ableitung dieser Hamiltonfunktion? Wir berechnen

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}. \quad (6.1)$$

Wegen  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  heben sich die Summen heraus. Für die Umformung des mittleren Terms nutzen wir die Euler-Lagrange-Gleichung. Insgesamt erhalten wir also

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k.$$

Die andere interessante partielle Ableitung ist mit einer ähnlichen Argumentation

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} p_i + \dot{q}_k - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (6.2)$$

Schließlich und endlich interessiert uns noch

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} p_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Die letzte Gleichung sagt uns insbesondere, dass  $H$  genau dann explizit zeitabhängig ist, wenn  $\mathcal{L}$  dies ist. Wir sehen, dass die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* oder auch *kanonischen Gleichungen* Gl. (6.1)(6.2) ein System von  $2N$  Differenzialgleichungen erster Ordnung bilden, da System also mithin vollständig beschreiben. Einen solchen Koordinatenwechsel nennt man auch *Legendretransformation*.

Wie berechnen wir für eine beliebige Größe  $F(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$  die Zeitabhängigkeit? Es zeigt sich

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned}$$

Die Objekte die wir so definiert haben heißen *Poissonklammern*. Auch die kanonischen Bewegungsgleichungen lassen sich als Spezialfall durch die Poissonklammern schreiben

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}.$$

In der Quantenmechanik werden sie eine ganz ähnliche mathematische Struktur kennenlernen, wobei der Kommutator an die Stelle der Poissonklammern tritt.

In unserem Beispiel von oben finden wir als Bewegungsgleichungen

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2} \quad \dot{p}_\rho = -\frac{p_\phi^2}{2m\rho^3} \quad \dot{p}_\phi = 0$$

d.h. wir sehen sofort sowohl die Zentrifugalbeschleunigung als auch die Drehimpulserhaltung.

## 6.2 Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen in einem externen elektromagnetischen Feld

Wir betrachten ein Teilchen mit Ladung  $q$  das sich in einem elektromagnetischen Feld betrachtet. Wir wissen, dass die elektrische Feldkomponente eine Kraft  $\vec{F} = q\vec{E}$  und die magnetische Feldkomponente eine Kraft  $\vec{F} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$  auf das Teilchen ausübt. Was ist seine Lagrangefunktion? Wir drücken das magnetische Feld durch ein Vektorpotenzial  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  als  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  und das elektrische Feld durch ein zusätzliches Skalarpotenzial als  $\phi(\vec{r}, t)$  als  $\vec{E} = -\nabla\phi + \dot{\vec{A}}$  aus. Die Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\phi - q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}}\mathcal{L} &= -q\nabla\phi - q\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \\ \nabla_{\dot{\vec{r}}}\mathcal{L} &= m\dot{\vec{r}} - q\vec{A} \\ \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\vec{r}}}\mathcal{L}) &= m\ddot{\vec{r}} - q\dot{\vec{A}} - q(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dies können wir umarrangieren zu

$$m\ddot{\vec{r}} = -q\vec{E} + q\left[(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A} - \nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})\right].$$

Um zu überprüfen, dass dies tatsächlich die richtige Lorentzkraft liefert. Wir nutzen das Levi-Civita-Symbol

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A})_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \dot{r}_j (\nabla \times \vec{A})_k \\ &= \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_l} A_m \\ &= \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_l} A_m \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) A_i. \end{aligned}$$



Damit haben wir gezeigt, dass hier tatsächlich die Lorentzkraft herauskommt. Auf dem Weg hierher haben wir etwas interessantes gesehen: Gleichung (6.3) sagt uns, dass der kinetische Impuls hier die Form  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} - q\vec{A}$  hat, also nicht Masse mal Geschwindigkeit ist. Wir können umformen, dass  $\dot{\vec{r}} = (\vec{p} + q\vec{A})/m$  und erhalten

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m} \vec{p} \cdot (\vec{p} + q\vec{A}) - \frac{1}{2m} (\vec{p} + q\vec{A})^2 + q\phi + \frac{1}{m} q\vec{A} \cdot (\vec{p} + q\vec{A}) \\ &= \frac{(\vec{p} + q\vec{A})^2}{2m} + q\phi. \end{aligned}$$

Es steht hier also in der kinetischen Energie wie üblich  $\vec{\pi}^2/2m$  (wobei wir  $\vec{\pi} = m\dot{\vec{r}}$  den kinematischen Impuls nennen, in Abgrenzung vom kanonischen Impuls  $\vec{p}$ ). Auch hier erhalten wir die gewünschte Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= -\frac{1}{m} (\vec{p} + q\vec{A}) \\ \dot{\vec{p}} &= \frac{q}{m} \vec{\nabla} \left[ (\vec{p} + q\vec{A})^2 \right] + q\nabla\phi \\ m\ddot{\vec{r}} &= -\left( \dot{\vec{p}} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}. \end{aligned}$$

### 6.3 Phasenraumdarstellung

Der kanonische Formalismus erlaubt es uns, die Bahnkurve in einem  $2N$  - Dimensionalen Phasenraum zu porträtieren. Wenn der Hamilton erhalten ist, bedingt dies automatisch eine Bedingung, d.h. die Bewegung verläuft auf einer  $2N$ -Dimensionalen Hyperfläche - im Fall des eindimensionalen harmonischen Oszillators z.B. auf einer Ellipse. Ein erster Ansatz für die Quantenmechanik (der aber nur in verschiedenen Grenzfällen richtig ist) war es, die in einer geschlossenen Bahn als diskret zu fordern

$$\oint dq p = \pi ab = \frac{2E}{\omega} \pi = 2\pi n\hbar \quad E = \hbar\omega n.$$

### 6.4 Kanonische Transformationen

Eine Stärke des Hamiltonformalismus ist es, dass man Koordinatentransformationen durchführen kann, die zwischen den Koordinaten und den Impulsen mischen. Dazu betrachten wir zuerst das zugrundeliegende Variationsprinzip

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = \delta \int dt \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right)$$

wobei die Variation hier die der Lagrangefunktion ist, also mit festen Randwerten durchgeführt wird. Wir variieren alle Variablen

$$0 = \int dt \sum_i \left[ \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right]$$

und integrieren den zweiten Term partiell und klammern aus

$$0 = \int dt \sum_i \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right].$$

Damit sehen wir dass wir, unter der Standardannahme beliebiger Variation die Variationsrechnung auch hier die kanonischen Bewegungsgleichungen erhalten.

Jetzt setzen wir eine beliebige kanonische Transformation an

$$Q_k = Q_k(q, p, t) \quad P_k = P_k(q, p, t).$$

Wir setzen die Transformation durch eine beliebige invertierbare Funktion  $G(q, Q, t)$  an. Damit sind die neuen Variationsprobleme äquivalent genau dann wenn  $\mathcal{L} = \mathcal{L} + \frac{dG}{dt}$  bzw.

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_k P_k \dot{Q}_k - H' + \frac{dG}{dt}. \quad (6.4)$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$dG = \sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \sum_k \frac{\partial G}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial G}{\partial t} dt.$$

Wir setzen dies ein in die Äquivalenzbedingung Gl. (6.4) ein und erhalten

$$\sum_i \left( p_i - \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) dq_i = \sum_k \left( P_k + \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) dQ_k + \left( H - H' + \frac{\partial G}{\partial t} \right) dt.$$

Die drei Differenziale sind wiederum unabhängig und generiert  $G$  die Transformation

$$p_i(q, Q, t) = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad P_k(q, Q, t) = -\frac{\partial G}{\partial Q_k} \quad H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Diese Gleichungen sind als Transformationsregeln für die Impulse und die Hamiltonfunktion zu lesen: Wir können  $p_i$  nach  $Q_k$  auflösen usw. Wir verifizieren das Variationsprinzip

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \delta \int dt \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) \\ &= \delta \int dt \left( \sum_k P_k \dot{Q}_k - H' + \frac{dG}{dt} \right) \\ &= \int dt \sum_k \left[ \dot{Q}_k \delta P_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial H}{\partial P_k} \delta P_k - \frac{\partial H}{\partial Q_k} \delta Q_k \right] + \delta (G(q(t_2), Q(t_2), t_2) - G(q(t_1), Q(t_1), t_1)). \end{aligned}$$

Wir betrachten den zweiten Term mittels partieller Integration

$$\int dt P_k \delta \dot{Q}_k = P_k \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt \dot{P}_k \delta Q_k.$$

In den neuen Koordinaten können wir nicht ohne weiteres argumentieren, dass der erste Term an den Grenzen verschwindet und müssen ihn stehenlassen. Das gilt auch für den letzten Term

$$\delta(G_2 - G_1) = \sum_k \frac{\partial G}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Damit erhalten wir also als gesamte Variation

$$0 = \delta S = \int dt \sum_k \left[ \left( \dot{Q}_k - \frac{\partial H'}{\partial P_k} \right) \delta P_k - \left( \dot{P}_k + \frac{\partial H'}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right] + \sum_k \left( P_k + \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Damit erzwingt einerseits dieses Variationsprinzip die kanonischen Gleichungen in den transformierten Koordinaten. Gleichzeitig erhalten wir Randbedingungen

$$P_k(t_{1/2}) = - \frac{\partial G(t_{1/2})}{\partial Q_k}.$$

#### 6.4.1 Beispiel: Kanonische Transformation für den harmonischen Oszillator

Wir haben die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

und betrachten die durch

$$G = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$$

generierte Transformation. Der ursprüngliche Impuls ist damit

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad Q = \tan^{-1} \frac{m\omega q}{p}.$$

Damit ist  $Q$  der Polarwinkel im Phasenraum. Der neue Impuls ist

$$P = - \frac{\partial G}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}.$$

Wir können damit auflösen

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

und erhalten daraus die transformierte Hamiltonfunktion

$$H' = H = \omega P$$

und die entsprechenden kanonischen Gleichungen

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega.$$

Damit sind wir also direkt in den Phasenraum gegangen und haben gezeigt, dass Radius und Winkel der Phasenraumtrajektorie ebenfalls ein konjugiertes Variablenpaar bilden. Dies wäre im Lagrangeformalismus nicht ohne weiteres möglich gewesen.

### 6.4.2 Hamilton-Jacobi-Theorie

Eine besonders extreme Form der kanonischen Transformation ergibt sich durch diejenige Transformation, durch die die neue Hamiltonfunktion verschwindet,

$$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

Wir werden sehen, dass die Erzeugende  $G$  hier gerade die Wirkung ist, haben das aber noch nicht gezeigt. Wenn uns das gelungen ist, dann sind die Impulse

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial q_k} \quad P_k = -\frac{\partial G}{\partial Q_k}$$

und aufgrund der kanonischen Gleichungen sind  $Q_i$  und  $P_i$  zeitunabhängig, was wird durch den oberen Index in  $Q_i^{(0)}, P_i^{(0)}$  kennzeichnen. Damit wird die Bedingung für das Verschwinden der neuen Hamiltonfunktion zu

$$H \left( \{q_i\}, \left\{ \frac{\partial G \left( \{q_i\}, \{Q_i^{(0)}\}, t \right)}{\partial q_i} \right\}, t \right) + \frac{\partial G \left( \{q_i\}, \{Q_i^{(0)}\}, t \right)}{\partial t} = 0.$$

Da die  $Q_i^{(0)}$  Konstanten sind handelt es sich hier um eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung in  $n+1$  Variablen zur Bestimmung von  $G$ . Diese hängt parametrisch von den Anfangswerten  $Q_i^{(0)}$  ab. Wenn wir dieses  $G$  gefunden haben, erhalten wir ebenso aus den oben genannten Gleichungen für den Impuls die Parameter  $P_k^{(0)}$  und die Variablen  $p_k$ . Diese können wir dann nach den  $q_i \left( \{Q_i^{(0)}\}, \{P_i^{(0)}\}, t \right)$  und  $p_i \left( \{Q_i^{(0)}\}, \{P_i^{(0)}\}, t \right)$  auflösen und haben somit die ursprünglichen Bewegungsgleichungen für diese Anfangsbedingungen gelöst.

Wie erhalten wir nun diese Funktion? Wir betrachten ihre totale Zeitableitung

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial G}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i + 0 - H = \mathcal{L}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$G = \int dt \mathcal{L} + \text{const.}$$

also ist  $G$  bis auf eine additive Konstante gleich der Wirkung. Wenn  $H$  nicht explizit von der Zeit abhängt dann ist  $G = S - Et$ , damit

$$\frac{\partial G}{\partial t} = H = E$$

sein kann. Damit entsteht die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung.

#### 6.4.2.1 Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld

Wir betrachten den freien Fall im Schwerfeld in zwei Dimensionen mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + mgz.$$

Damit lautet die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-DGL

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S(x, z)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S(x, z)}{\partial z} \right)^2 + mgz = E.$$

Die Lösungsfunktion ist dann  $S(x, z, E, a)$ . Der Parameter  $a$  trägt der Tatsache Rechnung, dass  $S$  von zwei Parametern abhängen muss, nicht nur von der Energie. Die Lösungstheorie von partiellen Differenzialgleichungen haben wir noch nicht vertieft behandelt - das kommt in der TP 2. Wir geben aber an, wie das gemacht wird.

Wir versuchen den Ansatz  $S(x, z) = S_1(x) + S_2(z)$ . Oben eingesetzt erhalten wir

$$(S_1'(x))^2 + (S_2'(z))^2 + 2m^2gz = 2mE.$$

Da keiner der letzten drei Terme von  $x$  abhängen, kann es auch der erste nicht, d.h.  $S_1'$  ist eine (von  $E$  unabhängige) Konstante. Aus Gründen der später einfacheren Notation setzen wir  $S_1 = \sqrt{a}x$ . Damit ist

$$\frac{dS_2}{dz} = \sqrt{2mE - a - 2m^2gz} \quad S_2 = -\frac{1}{3m^2g} (2mE - a - 2m^2gz)^{3/2}$$

und wir können so ausschreiben

$$S = \sqrt{a}x - \frac{1}{3m^2g} (2mE - a - 2m^2gz)^{3/2}.$$

Damit erhalten wir

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{a} \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{1}{3m^2g} (2mE - a - 2m^2gz)^{3/2}$$

$$P_x^{(0)} = -\frac{\partial S}{\partial E} + t \quad t - P_x^{(0)} = -\frac{1}{mg} \sqrt{2mE - a - 2m^2gz}.$$

Diese letzte Gleichung ist interessant. Sie lässt sich auflösen zu

$$z(t) = -\frac{g}{2} \left( t - P_x^{(0)} \right)^2 + \frac{2mE - a}{2m^2t} = -\frac{g}{2}t^2 + c_1t + c_2.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Wurfparabel.

Wir sehen, dass man mit der Hamilton-Jacobi-Technik durchaus etwas ausrechnen kann, aber ihre Hauptanwendung ist eher konzeptioneller Natur, als Beweismittel für die statistische Mechanik und den Übergang zur Quantenmechanik.

# Kapitel 7

## Kontinuumsmechanik

Bisher haben wir uns mit Punktmassen beschäftigt, mit einer Exkursion in starre Körper, die wir als Kombination von Massenpunkten beschrieben haben, was es uns erlaubt hat, die Zahl der unabhängigen Variablen massiv zu reduzieren. Jetzt stellen wir uns der Situation sehr vieler Freiheitsgrade indem wir uns der Kontinuumsmechanik von deformierbaren Systemen widmen. Dies wird uns auch helfen, den Lagrangeformalismus weiterzuentwickeln so, dass auch Felder und Wellenphänomene beschrieben werden können.

### 7.1 Balkenbiegung

Wir starten mit einer rein statischen Aufgabe, die uns hilft, einige später in der Dynamik relevante Konzepte zu entwickeln.

Wir betrachten einen Balken der Länge  $L$  und Dicke  $b$  aus einem Material mit Massendichte (pro Länge)  $\rho$  und Kompressionsmodul  $K$ . Er ist auf einer Seite horizontal eingeklemmt und befindet sich im Schwerfeld. Die Auslenkung gegenüber der Horizontalen nennen wir  $u(x)$ . Die Auslenkung soll klein sein. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L dx \dot{u}^2.$$

Wenn der Balken sich biegt (Skizze in der Vorlesung) ist eine Faser in der Mitte unverändert. Wir betrachten einen kleinen Abschnitt der Länge  $\Delta x$ . Der obere Rand wird dann auf die Länge  $\Delta x'$  gedehnt. Den Öffnungswinkel des Segments können wir durch die halbe Dicke  $b$  oder den Krümmungsradius  $R$  beschreiben und finden

$$\delta = \frac{\Delta x' - \Delta x}{b} = \frac{\Delta x}{R}.$$

Dieser Krümmungsradius ist gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} \simeq u''.$$

Der Energie Beitrag von Dehnung / Stauchung ist propotional zu

$$\left( \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} \right)^2 = \frac{b^2}{R^2} = b^2 u''.$$

Aus Kompressionsmodul und geometrischen Faktoren definieren wir eine neue Proportionalitätskonstante  $k$  so dass der Energiebeitrag durch die Kompression die Form hat

$$U_k = \frac{k}{2} \int_0^L dx (u'')^2.$$

Dazu kommt der Beitrag der Gravitation

$$U_g = \rho g \int_0^L dx u.$$

Uns interessiert die Gleichgewichtslage des Balkens. Dazu gehen wir zurück auf das Variationsprinzip und minimieren

$$J[u] = \int_0^L dx f(u'', u) = \int_0^L dx \left[ \frac{k}{2} (u'')^2 + \rho g u \right].$$

Dieses Variationsprinzip ist ein bisschen anders als gewohnt, weil jetzt im Integranden auch die zweite Ableitung eingeht. Wir können nicht ohne weiteres in die Euler-Lagrange-Gleichungen einsetzen. Auch haben wir andere Randbedingungen. Wir besinnen uns aber auf die Herleitung und berechnen

$$\begin{aligned} \delta J &= J[u + \delta u] - J[u] = \int_0^L dx \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \delta u'' + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u''} \delta u' \Big|_0^L + \int_0^L dx \left( \frac{\partial f}{\partial u} \delta u - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right) \delta u' \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u''} \delta u' \Big|_0^L - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right) \delta u \Big|_0^L + \int_0^L dx \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right) \right) \delta u \quad (7.1) \end{aligned}$$

d.h. wir integrieren einfach zwei mal partiell. Der letzte Term erzwingt bei beliebiger Variation im Inneren

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right) = - \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Im vorliegenden Fall bedeutet das  $u^{(4)} = -\rho g/K \equiv -24\alpha$ . Die Lösungen sind die Polynome  $u(x) = -\alpha x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ .

Jetzt benötigen wir die Randbedingungen. Für den einseitig eingespannten Balken ist  $\delta u(0) = 0$  und  $\delta u'(0) = 0$ . Darum erzwingt die Variationsbedingung bei  $x = L$  dass

$$\frac{\partial f}{\partial u''} \Big|_L = 0 \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u''} \Big|_L = 0.$$



Hier also  $u''(L) = 0$  und  $u^{(3)}(L) = 0$ . Das müssen wir anpassen in den schon zu den Anfangsbedingungen passenden Ausdruck  $u(x) = x^2(-\alpha x^2 + bx + c)$ . Einfaches aber mühevoll Anpassen an die Randbedingungen bei  $L$  liefert  $u(x) = -\alpha x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$ .

Unsere Formulierung erlaubt es uns auch, andere Randbedingungen zu studieren. Im Fall eines beidseitig eingespannten Balkens ist  $u(0) = u(L) = 0$  und  $u'(0) = u'(L) = 0$ . Damit verschwinden die Randterme der Variation automatisch, es entstehen keine weiteren. Die Lösung ist dann  $u(x) = -\alpha x^2(x - L)^2$ . Der dritte Fall ist der des beidseitig aufliegenden Balkens. Dort ist  $u(0) = u(L) = 0$ . Die Randbedingungen in Gl. (7.1) liefert dann noch dass  $u''(0) = u''(L) = 0$ . Hier ist dann das relevante Polynom  $u(x) = -\alpha x(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$ .

## 7.2 Saitenschwingung

### 7.2.1 Eindimensionale Wellengleichung und Variation für Felder

Jetzt wollen wir für die Kontinuumsmechanik auch die zeitliche Dynamik mitnehmen. Wir betrachten eine Saite als mit elastischer Rückstellkraft. Diese nähern wir zunächst als eine lineare Kette wie wir sie schon bei den gekoppelten Oszillatoren kennengelernt haben, bei der wir Abschnitte der Länge  $\Delta x$  durch Massenpunkte ersetzen. Wir wollen aber am Ende den Kontinuumsimes bilden, in dem wir aus der diskreten Kette eine kontinuierliche Saite machen (Skizze in der Vorlesung). Die Saite werde transversal mit  $u$  ausgelenkt

Die kinetische Energie im diskreten Fall ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{2} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \Delta x_i \frac{\rho}{2} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2.$$

Zur Bildung des Kontinuumsimes nutzen wir die Massendichte  $\Delta m_i = \rho \Delta x_i$ . Die elastische Rückstellkraft hängt von der Länge der Feder

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

ab. Wir gehen davon aus, dass die Auslenkungen klein sind und entwickeln in eine binomische Reihe

$$\Delta s \simeq \Delta x + \frac{1}{2} \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta x}.$$

Um daraus die potenzielle Energie zu bestimmen müssen wir uns überlegen, wie die Federkonstante von der Länge abhängt. Dazu überlegen wir uns, dass auch ohne Auslenkung eine Vorspannung  $P$  auf der Saite liegt, die die Dimension einer Kraft hat. Die potenzielle Energie ist damit

$$U = P \Delta x + \frac{P}{2} \sum_i \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta x}.$$

Jetzt führen wir den Kontiuumslimes durch, indem wir die Zahl der Summanden  $N \rightarrow \infty$  gehen lassen und gleichzeitig  $\Delta x \propto 1/N$  gegen null. Die Auslenkung  $u_i$  wird damit durch die Koordinate entlang der Saite  $x$  charakterisiert zu  $u(x)$ . Damit ist die kinetische Energie

$$T = \int dx \frac{\rho}{2} \left( \frac{du(x,t)}{dt} \right)^2$$

In der potenziellen Energie nutzen wir den Differenzialquotienten

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

und erhalten die potenzielle Energie, bis auf die konstante Vorspannung

$$U = \int dx \frac{P}{2} \left( \frac{du(x,t)}{dx} \right)^2$$

Damit ist die gesamte Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \int dx \mathfrak{L} = \int dx \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{du(x,t)}{dt} \right)^2 - \frac{P}{2} \left( \frac{du(x,t)}{dx} \right)^2 \right].$$

Den Integranden  $\mathfrak{L}$  nennen wir die Lagrangedichte. Die Wirkung ist dann ein Doppelintegral

$$S = \int dt \int dx \mathfrak{L}(\dot{u}, u', u)$$

wobei wir an für Zeit- und Ortsableitung die Abkürzungen  $\dot{u}$  und  $u'$  nutzen. Diese Symmetrie zwischen räumlichem und zeitlichem Integral erlaubt es uns bei einer eingespannten Saite die Variation von  $u$  entlang beider Abhängigkeiten durchzuführen. Dies liefert und die Euler-Lagrange-Gleichung für ein eindimensionales Wellensystem

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u'} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}.$$

Im Fall der angespannten Saite liefert dies die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (7.2)$$

$c$  hat hier die Bedeutung einer Schallgeschwindigkeit. Ein typisches Anfangswertproblem würde  $u(x, t_1)$  und  $\dot{u}(x, t_1)$  vorgeben.

### 7.2.2 Verallgemeinerungen

Wenn an der Saite noch eine ortsabhängige Kraft  $F(x, t)$  angreift (z.B. mein Musizieren), dann entsteht ein zusätzliches Potenzial ähnlich dem getriebenen Oszillator und wir haben

$$\mathfrak{L} = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} u'^2 - uF(x, t).$$

Die Euler-Lagrangegleichung ist dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{F(x,t)}{P}.$$

Auch können wir natürlich mehr als nur eine räumliche Dimension haben. z.B. bei Membranen. Im Allgemeinen definiert man den  $d$ - Dimensionalen Laplaceoperator

$$\Delta_d = \nabla^2 = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}.$$

Die  $d$ - dimensionale Wellengleichung ist dann

$$\Delta_d u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

### 7.2.3 Lösungsstrategien

Wir betrachten Lösungsstrategien für die eindimensionale Wellengleichung für eine im Kreis geschlossene Saite der Länge  $L$ . Um die Gleichung eindeutig lösen zu können, müssen wir zu einer (willkürlich als  $t = 0$  gesetzten) Zeit eine Lösung vorgeben,  $u(x, 0)$ . Bevor wir uns anschauen betrachten wir Lösungen der Form

$$u_k(x, t) = \operatorname{Re} \left[ u_0 e^{i(kx - \omega t)} \right]$$

wobei aufgrund der periodischen Randbedingung  $k = 2\pi n/L$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sein muss. Wenn wir dies in die eindimensionale Wellengleichung 81 einsetzen erhalten wir

$$0 = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u_k(x, t).$$

Damit ist  $u_k$  genau dann eine Lösung, wenn  $\omega^2 = k^2 c^2$  ist. Eine solche Gleichung nennt man eine *Dispersionsrelation*. Hier sind die Lösungen  $\omega = \pm \omega_k = \pm kc$ . Damit haben wir zwei Satz Lösungen gefunden

$$u_k^\pm(x, t) = \operatorname{Re} \left[ u_k^\pm e^{i(kx \mp \omega_k t)} \right] \quad \dot{u}_k^\pm(x, t) = \operatorname{Re} \left[ \mp i \omega_k u_k^\pm e^{i(kx \mp \omega_k t)} \right].$$

Diese entsprechen rechts- und linkslaufenden harmonischen Wellen. Damit benötigen wir zur Beschreibung dieser Lösungen vier reelle Zahlen: Die Real- und Imaginärteile von  $u_k^\pm$ . Insbesondere finden wir zur Zeit der Anfangsbedingung dass

$$u_k^\pm(x, 0) = \operatorname{Re} \left[ u_k^\pm e^{ikx} \right] \quad \dot{u}_k^\pm(x, 0) = \operatorname{Re} \left[ \mp i \omega_k u_k^\pm e^{ikx} \right].$$

Wenn der Anfangswert der Lösung also vorgegeben ist und die Form

$$u(x, 0) = \operatorname{Re} \left[ f_k e^{ikx} \right] \quad \dot{u}(x, 0) = \operatorname{Re} \left[ v_k e^{ikx} \right]$$

hat, dann können wir die Koeffizienten bestimmen. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$f = u_k^+ + u_k^- \quad v = -i \omega_k (u_k^+ - u_k^-)$$

Dies können wir auflösen und erhalten

$$u_k^\pm = \frac{1}{2} \left( f \pm \frac{iv}{\omega_k} \right). \quad (7.3)$$

Was machen wir jetzt bei beliebigen Anfangsbedingungen? Wir nutzen die Linearität der Wellengleichung aus, die es uns erlaubt, Fouriermethoden anzuwenden. Seien jetzt  $u(x, 0)$  und  $\dot{u}(x, 0)$  beliebig vorgegeben. Da der Definitionsbereich  $x \in [0, L]$  ist und die Funktionen periodisch fortsetzbar sind, existiert eine Zerlegung in eine Fourierreihe

$$u(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx/L} \quad \dot{u}(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{inx/L}$$

wobei wir die Koeffizienten berechnen können via

$$f_n = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L dx u(x, 0) e^{-inx/L}$$

und der analogen Formel für die  $v_n$ . Damit können wir Entwicklungskoeffizienten  $u_n^\pm$  aus Formel 7.3 bestimmen und erhalten als Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( u_n^+ e^{in/L(x-ct)} + u_n^- e^{in/L(x+ct)} \right).$$

Wir können leicht verifizieren, dass dies tatsächlich die Wellengleichung löst. Wir rechnen

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = \\ & \sum_n \left( u_n^+ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{in/L(x-ct)} + u_n^- \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{in/L(x+ct)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Die Tatsache dass wir Summation und Skalarmultiplikation mit dem Differentialoperator vertauschen können verdanken wir dessen Linearität.

### 7.3 Elemente der Hydrodynamik

Ein prominentes Gebiet der klassischen Mechanik von hoher Bedeutung und mit hochaktuellen Fragestellungen ist die Hydrodynamik. Diese basiert, wie wir im Folgenden auch entwickeln werden, auf nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen mit entsprechend komplexer Lösungstheorie. Der Übergang in Turbulenz, z.B., ist ein sehr komplexes System mit Auswirkungen u.a. in der Meteorologie aber auch im Maschinenbau. In der Physik hat die Hydrodynamik Anwendungen unter anderem in der biologischen Physik und in der Astrophysik.

Vieles ist natürlich auch bekannt und gut verstanden, und unter anderem sind die Grundgleichungen sehr einfach, darin geben wir Ihnen eine Einführung. Eine der mathematischen Werkzeuge die wir hier nutzen, insbesondere die Beschreibung kontinuierlicher Verteilungen, entwickeln den Anschluss an die Elektrodynamik im kommenden Semester.

### 7.3.1 Kontinuumslimes

Ausgangspunkt ist die Beschreibung einer kontinuierlichen Masseverteilung, die aber anders als beim starren Körper deformierbar ist. Dazu führen wir die Massendichte  $\rho(\vec{r}, t)$  ein. Diese entsteht wenn man in einem Raumelement der Größe  $\Delta V$  um den Aufpunkt  $\vec{r}$  alle dort enthaltenen Massen zählt und den Grenzübergang

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\vec{r}_\nu \in \Delta V} m_\nu}{\Delta V} = \sum_{\nu} m_\nu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \equiv \rho(\vec{r}, t)$$

durchführt. Jedes dieser Teilchen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_\nu$  und so können wir für das Fluid auch eine Geschwindigkeitsverteilung angeben gemäß

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{\nu} \vec{v}_\nu \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_\nu)$$

und daraus die Massenstromdichte  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Ferner führen wir den Druck als Kraft pro Fläche ein, zu den mathematischen Details später mehr.

Hier fällt uns auf, dass in der Definition der Geschwindigkeit der Ort eine Doppelrolle spielt - die Teilchen ändern ihren Ort mit der gegebenen Geschwindigkeit, d.h. die Orte zu einer zukünftigen Zeit hängen von der Geschwindigkeitsverteilung ab. Das bedeutet, dass diese nicht völlig beliebig sein kann, da sie von Teilchen getragen wird.

Betrachten wir ein Volumen  $V$  so können wir die Änderung der darin enthaltenen Masse einerseits durch die Masse und andererseits durch den Strom aus der Oberfläche heraus ausdrücken

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\partial V} d^2r \hat{n} \cdot \vec{j} = - \int_V d^3r \nabla \cdot \vec{j}$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Gauß angewandt haben. Da diese Gleichung für beliebige Volumina  $V$  gelten muss, folgt aus dieser Massenerhaltung die *Kontinuitätsgleichung*

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Jetzt wollen wir uns die Kräftebilanz anschauen. Wir schauen für ein Volumenelement mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\rho \Delta V \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_{\text{ext}} + \Delta \vec{F}_{\text{Druck}}.$$

Die externe Kraft können wir durch eine Kraftdichte ausdrücken (Beispiele folgen) als  $\vec{F}_{\text{ext}} = \Delta V \vec{f}_{\text{ext}}$ . Der Druck ist ein Skalar von der Einheit Kraft / Fläche. Wenn wir das Volumenelement als Quader parameterisieren,  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  dann können wir die aus dem Druck entstehende Gesamtkraft berechnen über die orientierten Kräfte an den Deckflächen (Zeichnung in der Vorlesung)

$$\begin{aligned} \Delta F_{\text{Druck}} &= - \oint_{\Delta V} d^2r \hat{n} P \\ &= -\hat{e}_x \Delta y \Delta z [P(x + \Delta x) - P(x)] - (y \leftrightarrow z \leftrightarrow x) - (z \leftrightarrow x \leftrightarrow y) \\ &= -\Delta V \nabla P \end{aligned}$$

was zur Kraftdichte  $\vec{f}_{\text{Druck}} = -\nabla P$  führt.

Jetzt müssen wir uns noch an den Trägheitsterm machen. Es bewegt sich Materie mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Der Impuls kann sich einerseits explizit dadurch verändern, dass sich die lokale Geschwindigkeit ändert, andererseits aber implizit dadurch, dass sich an der betrachteten Stelle mehr Materie ansammelt, die aus der Nachbarschaft hereingeströmt kommt. Wir schreiben das totale Differenzial der Geschwindigkeit und finden

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial r_i} dr_i \\ &= \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial t} \right] dt \end{aligned}$$

damit erhalten wir als Darstellung der Newtonschen Bewegungsgleichung in einer Flüssigkeit die *Eulergleichung*<sup>1</sup>

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \vec{f}.$$

Wir können jetzt zählen, dass wir mit  $\rho$ ,  $\vec{v}$  und  $P$  insgesamt fünf skalare Felder haben, mit der Bewegungsgleichung und der Kontinuitätsgleichung aber nur vier Differenzialgleichungen - zur eindeutigen Bestimmung fehlt also noch etwas. Dies ist eine Gleichung, die uns die Gesetze der Mechanik nicht liefern können, sondern die die mikroskopischen Eigenschaften des Fluides beinhalten. Diese werden gemessen oder mit den Mitteln der statistischen Mechanik nachgemessen. Ein Beispiel ist der Druck-Dichte Zusammenhang  $P \propto \rho^\gamma \propto V^{-\gamma}$  mit der entsprechenden Kompressibilität

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p} \log V = \frac{1}{\gamma P}.$$

In einem idealen Gas wäre  $PV = nrT$ , also  $\gamma = 1$ .

### 7.3.2 Hydrostatik

Als erste Anwendung betrachten wir die Hydrostatik, also die Physik ruhender Flüssigkeiten. Dort ist  $\vec{v} = 0$ , d.h. in der Eulergleichung muss Kräftegleichgewicht herrschen,  $\vec{f} = \nabla P$ . In einem Schwerfeld wäre  $\vec{f} = -\rho g \hat{e}_z$  also

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(z)g.$$

Die Zustandsgleichung einer inkompressiblen Flüssigkeit ist dann einfach  $\rho = \rho_0$  und so erhalten wir  $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$  - einen Druckbeitrag durch die

<sup>1</sup>wie Sie schon merken war Herr Euler sehr produktiv

Schwerkraft der Wassersäule über dem Beobachter. Für ein ideales Gas mit atomarer Masse  $m$  ist  $\rho = mN/V = mP/k_B T$ . Oben eingesetzt erhalten wir

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{mg}{k_B T} P.$$

Lösung dieser Differenzialgleichung ergibt die barometrische Höhenformel

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{mg}{k_B T} z\right).$$

Der Luftdruck fällt also mit einer Skalenhöhe  $z_0 = k_B T/mg$ .

### 7.3.3 Fließgleichgewichte

Hier betrachten wir Situationen in denen das Fluid fließt, dieser Zustand aber stationär ist. Wir betrachten als Beispiel eine rotierende Flüssigkeit im Schwerfeld. Wir haben also ein Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  in einer Flüssigkeit mit  $\rho = \rho_0$ , die Drehachse sei die  $z$ -Achse  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ . Damit ist in Zylinderkoordinaten  $\vec{v} = \omega \rho \hat{e}_\phi$ . Das externe Kraftfeld ist  $\vec{f} = -g\rho_0 \hat{e}_z$ . Die Situation ist rotationssymmetrisch, d.h. die Druckverteilung  $P(\rho, z)$  ist dies auch. Die Kontinuitätsgleichung ist automatisch erfüllt, es ist  $\dot{\rho} = 0$  und  $\nabla \cdot \vec{j} = \rho \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$ . Wir berechnen in Zylinderkoordinaten unter Benutzung der  $\phi$ -Komponente des Nablaoperators (siehe Nebenrechnung)

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \omega \rho \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\omega \rho \hat{e}_\phi) \right] = \omega^2 \rho \frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} = -\omega^2 \rho \hat{e}_\rho.$$

Damit wird aus der Eulergleichung

$$-\rho_0 \omega^2 \rho \hat{e}_\rho = -\frac{\partial P}{\partial \rho} \hat{e}_\rho - \frac{\partial P}{\partial z} \hat{e}_z - \rho_0 g \hat{e}_z.$$

Durch Koeffizientenvergleich vor den linear unabhängigen Basisvektoren erhalten wir

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho_0 g \quad \frac{\partial P}{\partial \rho} = \rho_0 \omega^2 \rho.$$

Damit erhalten wir

$$P(\rho, z) = \rho_0 \left( \frac{\omega^2 \rho^2}{2} - gz \right) + P_0.$$

Damit sind die Isobaren (=Linien konstanten Druckes) Parabeln der Form  $z = \frac{\omega^2 \rho^2}{2g}$ . Sie kennen das aus dem Experiment mit dem Rotierenden Eimer - die Isobare die die Grenzfläche zur Umgebungsluft definiert ist ein Rotationsparaboloid.

### 7.3.4 Bernoullieffekt

Wir betrachten die kräftefreie, stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluides, d.h. die Eulergleichung ist

$$\rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla P.$$

Wir multiplizieren diese Vektorgleichung skalar von links mit  $\vec{v}$  und erhalten

$$\rho_0 \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \nabla) P.$$

Was machen wir damit? Wir berechnen

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left[ \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} + P \right] = \rho_0 \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) P = 0.$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Richtungsableitung entlang einer Stromlinie von folgender Größe

$$P_{\text{tot}} = \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} + P$$

verschwindet, diese Größe also entlang einer Stromlinie konstant ist. Den ersten Beitrag, die kinetische Energiedichte der Strömung, nennt man den Staudruck der Strömung. In der Experimentalphysik haben Sie (vermutlich) gelernt, wie dies z.B. dafür sorgt dass beim Duschen der Duschvorhang nach innen gewölbt wird und am Bein klebt.



## Kapitel 8

# Stabilität und dynamische Systeme