Theoretische Physik II

WS 2015/16 **21.10.2015**
Blatt 1 **Fälligkeitsdatum 29.10.2015**

Aufgabe 1: Gradient, Divergenz, Rotation

(a) Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen $f(x,y) = x^2 \sin(5y)$ und $g(x,y,z) = ze^{-xy}$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie Divergenz und Rotation von $\vec{F} = (-y, xy, z)$. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie jeweils die Rotation der Lösungen aus Aufgabenteil a). (2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder (xy, yz, xz), (yz, xz, xy) und $(x/r, y/r, z/r)$ wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (2 Punkte)

(e) Berechen Sie jeweils die Rotation der Vektorfelder aus Aufgabenteil d). (2 Punkte)

Aufgabe 2: Integralsätze – Gauß und Stokes

Der Satz von Stokes zur Berechung des Flächenintegrals der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{F}$ über eine offene, orientierbare Fläche A mit einfach geschlossener Randkurve ∂A lautet

$$\int_A \mathrm{rot}\left(\vec{F}\right) \mathrm{d}A \ = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{1}$$

Hierbei wird ∂A im mathematisch positiven Sinne umlaufen. Eine ähnliche Gestalt besitzt der Satz von Gauß, der das Volumenintegral über die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes mit einem Oberflächenintegral gemäß

$$\int_V \mathrm{div}\left(\vec{F}\right) \mathrm{d}V \ = \oint_{\mathcal{O}(V)} \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A \tag{2}$$

verknüpft. Hierbei bezeichnet $\mathrm{d}A$ das infinitesimale Flächenelement der Oberfläche $\mathcal{O}(V)$ und $\vec{n}$ deren positive Normale.

(a) Geben Sie eine anschauliche Bedeutung des Satzes von Gauß an. (0,5 Punkte)

(b) Berechnen Sie folgende Integrale (1+1 Punkte)

  (i) $\iint_S G(\vec{r})$ für $G(\vec{R}) = 3(x+y+z)$ und die Oberfläche $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1, z = x + y\}$

  (ii) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A$ für $\vec{F} = z^3(\hat{e}_x - \hat{e}_z)$ $\quad S : \vec{r} = u\cos(v)\hat{e}_x + u\sin(v)\hat{e}_y + u\hat{e}_z$, $0 \leq u \leq 5, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

(c) Ein Teilchen bewegt sich entlang einer Spirale (Radius 1, Höhe H), deren Längsachse entlang der z-Achse ausgerichtet ist. Das Kraftfeld ist durch $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{e}(r)/r^2$ gegeben, wobei $\hat{e}(r) = \vec{r}/|\vec{r}|$.

  (i) Finden Sie eine Parametrisierung der Spirale. (0,5 Punkte)

  (ii) Berechnen Sie die verrichtete Arbeit. (1 Punkt)

(d) Verifizieren Sie den Satz von Gauß für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (4x, -2y^2, z^2)$$

auf dem Volumen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$. (2 Punkte)

(e) Zeichnen Sie die durch

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2, z \leq 2\}$$

definierte Fläche. Wie nennt man den entsprechenden Körper? (1 Punkt)

(f) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (3y, -xz, yz^2)$$

das Oberflächenintegral in Glg. (1), wobei die Oberfläche aus Aufgabenteil e) zugrunde gelegt wird. (1 Punkt)

(g) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2 z),$$

wobei die obere Hälfte der Kugelfläche (Radius R) betrachtet werden soll. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Das Dirac-Delta

Die Deltafunktion kann durch die zwei Eigenschaften

$$\delta(x) = 0, \quad \text{für } x \neq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \tag{3}$$

definiert werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$F_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-x^2/2\epsilon^2} \tag{4}$$

für $\epsilon \to 0$ diese Eigenschaften erfüllt. (3 Punkt)

(b) Zeigen Sie mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta'(x - x_0) = -f'(x_0) \tag{5}$$

gilt. (3 Punkte)

(c) Beweisen Sie die folgende Eigenschaft (2 Punkte)

$$\delta(k(x - x_0)) = \frac{1}{|k|}\delta(x - x_0). \tag{6}$$

(d) Beweisen Sie

$$\delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|}\delta(x - x_0), \tag{7}$$

wobei x_0 die einzige einfache Nullstelle von $h(x)$ ist. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Das Nabla-Kalkül

(a) Im ersten Teil der Aufgabe sollen einige wichtige Rechenregeln bezüglich des Nabla Operators ∇ nachvollzogen werden. Hierzu kann es nützlich sein den total antisymmetrischen Tensor (auch: Levi-Civita-Symbol)

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1, & (i,j,k,\ldots) \text{ ist gerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \\ -1, & (i,j,k,\ldots) \text{ ist ungerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \\ 0, & \text{mindestens zwei Indizes sind identisch} \end{cases} \tag{8}$$

zu verwenden. Speziell im Dreidimensionalen lässt sich durch ihn die i-te Komponente des Kreuzproduktes schreiben als

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \tag{9}$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird. Ein nützlicher Zusammenhang zum Kronecker-Delta lautet

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \tag{10}$$

Weisen Sie nun für die Vektoren $\vec{A}, \vec{B}$ und ein skalares Feld ϕ folgende Identitäten nach: (2+2+2 Punkte)

(i) $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$

(ii) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

(iii) $\nabla \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{A}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \nabla\right)\vec{B} - \vec{B}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)$

(b) Leiten Sie Ausdrücke für den Nabla Operator in den folgenden Koordinatensystemen her: (2+2 Punkte)

(i) Ebene Polarkoordinaten

(ii) Kugelkoordinaten