Theoretische Physik II

WS 2015/16 **28.10.2015**
Blatt 2 **Fälligkeitsdatum 05.11.2015**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter.

Problem 1: Fouriertransformation

(a) Zeigen Sie, dass die Deltafunktion durch das Integral

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

dargestellt werden kann.
Hinweis: Führen Sie die Form der Deltafunktion durch Ergänzung eines quadratischen Terms ($-\epsilon k^2$, $\lim_{\epsilon\to 0}$, $\epsilon > 0$) im Exponenten auf die bekannte Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-x^2/a^2}, a > 0$$

züruck.
(2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $2\pi\delta(x - x_0)$ die Fouriertransformierte von $\exp(-ikx_0)$ ist.
(2 Punkte)

(c) Der Satz von Parseval sagt aus, dass die Energie eines Signals in einem gegebenem Zeitintervall gleich der Energie im entsprechenden Frequenzintervall ist. Diese Aussage lässt sich mathematisch ausdrücken durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, |F(\omega)|^2 .$$

Beweisen Sie obige Gleichung.
(3 Punkte)

(d) Finden Sie die Fouriertransformierte der Gaußschen Funtion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} .$$

Hinweis: Quadratische Ergänzung.
(3 Punkte)

Problem 2: Ladungsverteilungen und -ströme

(a) Betrachten Sie zwei Punktladungen $q_1 = e$ und $q_2 = -e$, welche sich auf der x-Achse bei $x_1 = a$ and $x_2 = -a$ befinden sollen. Finden Sie einen Ausdruck für die eindimensionale Ladungsdichte.
(2 Punkte)

(b) Betrachten Sie eine Sphäre mit Radius R mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0,0,0)$ und konstanter Flächenladungsdichte σ, sowie eine Punktladung q lokalisiert im Koordinatenursprung $(0,0,0)$. Finden Sie einen Ausdruck für die dreidimensionale Ladungsdichte sowohl in sphärischen, als auch in kartesischen Koordinaten.
(2 Punkte)

(c) Betrachten Sie nun eine geladene Schnur welche entlang der x-Achse von $x = 0$ bis $x = L$ gespannt ist. Die Schnur besitze die lineare Ladungsdichte λ. Finden Sie wie zuvor einen Ausdruck für die dreidimensionale Ladungsdichte sowohl in sphärischen, als auch in kartesischen Koordinaten.
(3 Punkte)

(d) Betrachten Sie einen hohlen leitenden Zylinder mit Radius R welcher entlang der z-Achse zentriert ist. Die Ladungsdichte sei homogen in z-Richtung und $\lambda = \cos\theta$ in der (x, y)-Ebene, wobei θ den azimutalen Winkel der Zylinderkoordinaten beschreibt. Die Ladungen des Hohlzylinders fließen nun in positiver z-Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$. Geben Sie die Ladungsdichte in Zylinderkoordinaten an.
(3 Punkte)

Problem 3: Grafische Darstellung elektromagnetischer Felder

Zum Lösen der folgenden Aufgaben ist das Verwenden von mathematischer Software nötig. Es ist Ihnen dabei freigestellt welche (z.B. MatLab, Mathematica, Maple,...) sie verwenden. Es ist ausreichend die vollständigen Plots einzureichen.

(a) Zeichnen sie das Potential als ein Contour Plot, sowie das elektromagnetische Feld für die folgenden Ladungskonfigurationen:

(i) Zwei Punktladungen $q_1 = 2$ bei $(x = -1, y = -2)$ und $q_2 = -2$ bei $(x = 2, y = 1)$.
(2 Punkte)

(ii) Drei geladene Schnüre, parallel zur y-Achse gespannt bei $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$. Die homogene lineare Ladungsdichte beträgt $\lambda = 2$.
(2 Punkte)

(b) Zeichnen Sie im Folgenden jeweils das entsprechende Feld $\vec{F}$, sowie dessen Divergenz und Rotation.

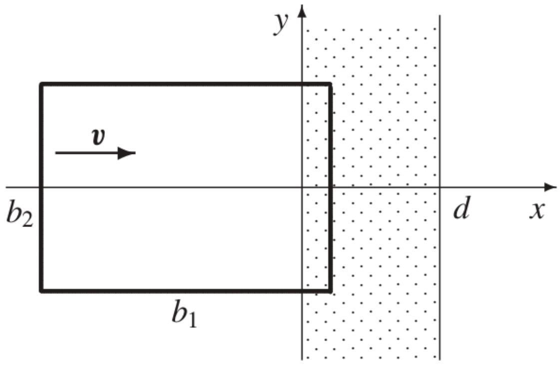
(i) $\vec{F} = x^2\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y$
(2 Punkte).

(ii) $\vec{F} = \frac{1}{r^2}\hat{e}_r + \frac{1}{(r-10)^2}\hat{e}_r$
(2 Punkte).

(iii) $\vec{F} = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y$
(2 Punkte).

Problem 4: Induzierte Spannungen

Eine rechteckige Leiterschleife (Seitenlängen b_1 und b_2) liegt in der x-y-Ebene und bewegt sich mit konstanter, nichtrelativistischer Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$. Im Bereich



$0 \leq x \leq d < b_1$ wirkt ein konstantes homogenes Magnetfeld $\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z$, das in der Skizze durch Punkte markiert ist. Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Ringspannung $U(t)$ mit dem Faradayschen Gesetz. Skizzieren Sie die Funktion $U(t)$.
(5 Punkte)