Theoretische Physik II

WS 2015/16 **05.11.2015**
Blatt 3 **Fälligkeitsdatum 12.11.2015**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter. Die Einteilung und E-Mail Adressen finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Eichungen

(a) Prüfen Sie, ob die Coulomb- und die Lorentzeichung für die folgenden Potenziale gelten: (2+2 Punkte)
$A(r,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$, $\phi = 0$
$A(r,t) = -A_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y}$, $\phi = 0$

(b) Nutzen Sie die Maxwellgleichungen um das Vektorpotenzial und das magnetische Feld einer fortlaufenden Welle $E = E_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct))\hat{y}$, die die Lorentzeichung erfüllt (wobei $\phi = 0$), zu finden. (5 Punkte)

(c) Welche Aussage kann im Falle der Weyl-Eichung ($\phi = 0$), über die Lorentz- und die Coulombeichung getroffen werden? (1 Punkt)

Aufgabe 2: Drehimpuls

Elektromagnetische Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lassen sich durch ihre Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right) \tag{1}$$

und ihre Impulsdichte

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} \tag{2}$$

charakterisieren. Hierbei bezeichnet $\vec{S} = 1/\mu_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$ den Poynting Vektor. In kompakter Form lassen sich unter anderem diese Größen im sog. Energie-Impulstensor

$$(T)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} w & c\vec{g}^T \\ c\vec{g} & -(T_{ik}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

zusammenfassen - $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. $T_{ik} = \epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0}B_i B_k - \delta_{ik}\left(\frac{\epsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)$ mit $i, k = 1, 2, 3$ ist der Maxwellsche Spannungstensor. Im Rahmen einer relativistischen Theorie lässt sich eine Drehimpulsdichte einführen, aus der sich der bekannte dreidimensionale Drehimpuls $\vec{l}$ schreiben lässt als

$$l_i = \frac{1}{2c^2}\varepsilon_{ijk}\left(\vec{r}_j\vec{S}_k - \vec{r}_k\vec{S}_j\right), \tag{4}$$

wobei das von Blatt 1 bekannte Levi-Civita-Symbol verwendet wird.

(a) Leiten Sie ausgehend von Glg. (4) einen möglichst kompakten Ausdruck für den Drehimpuls $\vec{l}$ her. (1 Punkt)

(b) Verwenden Sie nun erneut das Levi-Civita-Symbol, um die i-te Komponente des Drehimpulses aus Teil a) auszudrücken. (3 Punkte)

Zur Kontrolle: Das Endergebnis von Teil b) lautet: $\mu_0 c^2 l_i = E_l (\vec{r} \times \nabla)_i A_l - \varepsilon_{ijk} r_j E_l \partial_l A_k$

(c) Schreiben Sie diesen Ausdruck nun um, indem Sie die Produktregel geschickt anwenden und argumentieren Sie, warum verschiedene Terme verschwinden. (3 Punkte)

(d) Sie haben im vorigen Aufgabenteil gesehen, dass lediglich zwei Terme nicht verschwinden. Schreiben Sie diese in Vektorform nieder und beschreiben Sie den fundamentalen Unterschied zwischen beiden Beiträgen. (2 Punkte)

(e) Berechnen Sie die beiden Drehimpulse aus Teil d) nun explizit für eine rechtszirkular polarisierte Ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet (1 Punkt)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \left(\cos(kz - \omega t), -\sin(kz - \omega t), 0 \right)^T .$$

Aufgabe 3: Poynting-Vektor und Selbstenergie

(a) Nehmen Sie an, dass die Sonne Strahlung in Form von Kugelwellen abgibt, deren elektrisches Feld gegeben ist durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{|\vec{r}|} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{e}_\theta$$

(i) Berechnen Sie den Poynting-Vektor. In welcher Richtung wird demnach die Energie abgestrahlt? (2 Punkte)

(ii) Sie möchten im Weltall ein Solarboot durch den vom Sonnenlicht auf ein Sonnensegel der Fläche A ausgeübten Strahlungsdruck antreiben. Wie groß muss die Fläche des Segels mindestens sein, damit sie die Anziehung des Bootes aufgrund der Sonnengravitation überwinden können? Vernachlässigen Sie hierzu die Masse des Sonnensegels und nehmen Sie folgende Konstanten an: Sonnenmasse $M = 2 \cdot 10^{30}$kg, Masse des Bootes $m = 1000$kg, Feldamplitude $E_0 = 1,55 \cdot 10^{14}$V. (3 Punkte)

(b) Elektrostatische Felder lassen sich durch $\vec{E} = -\nabla \phi$ aus einem skalaren Potential ϕ herleiten. Entsprechend gehorchen Sie $\nabla \times \vec{E} = 0$, sodass alle auftretenden magnetischen Felder statisch sein müssen (Faraday'sches Induktionsgesetz). Es existieren jedoch auch zeitabhängige Felder, für die $\nabla \times \vec{E} = 0$ gilt.

(i) Berechnen Sie das elektrische Feld, das sich aus dem Potential $\phi = i \frac{E_x}{k} e^{i(kx - \omega t)}$ ergibt. (1 Punkt)

(ii) Um welche Art von Welle handelt es sich in diesem Fall? Weisen Sie nach, dass sie ausschließlich in Verbindung mit statischen magnetischen Feldern vorkommen kann. (2 Punkte)

(iii) Berechnen Sie den Poynting-Vektor und den Energie-Impuls-Tensor für dieses Feld. (2 Punkte)

(c) Im Folgenden werden Sie die Selbstenergie einer Punktladung berechnen.

(i) Geben Sie das elektrische Potential eines Elektrons an und berechnen Sie daraus dessen elektrisches Feld (1 Punkt)

(ii) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus Teil i) die Selbstenergie des Elektrons. Was beobachten Sie hierbei? (2 Punkte)

(iii) Nehmen Sie nun an, dass das Elektron einen endlichen Radius besitzt. Wie groß muss dieser sein, damit dessen Selbstenergie mit der Ruheenergie $m_e c^2$ übereinstimmt? (1 Punkt)

Aufgabe 4: Geladene Kugel

(a) Finden Sie das elektrische Feld im Innern einer Kugel, deren Ladungsdichte proportional zum Quadrat des Abstandes zum Ursprung ist. (4 Punkte)

(b) Berechnen Sie auch das zugehörige Potenzial. (2 Punkte)