Theoretische Physik II

WS 2015/16 **12.11.2015**
Blatt 4 **Fälligkeitsdatum 19.11.2015**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter oder besuchen Sie das Tutorium. Einzelheiten zu Terminen und Ähnlichem finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Satz von Gauß

(a) Ein langer Zylinder sei geladen mit einer Ladungsdichte proportional zum Abstand s vom Zentrum: $\rho = ks$, wobei k konstant. Bestimmen Sie das elektrische Feld innerhalb des Zylinders. (4 Punkte)

(b) Eine Ebene habe die gleichmäßige Flächenladungsdichte σ. Bestimmen Sie das elektrische Feld. (4 Punkte)

(c) Zwei parallele Ebenen tragen entgegengesetzte Flächenladungsdichten $\pm\sigma$. Bestimmen Sie die elektrischen Felder in den folgenden 3 Bereichen: (2 Punkte)

(i) auf der Seite der negativen Ladung

(ii) zwischen den Ebenen und

(iii) auf der anderen Seite

Aufgabe 2: Greensfunktion

Beutzen Sie den in der Vorlesung eingeführten Greensfunktionsformalismus, um die Lösung des ungedämpften, getriebenen harmonischen Oszillator für jede der im Folgenden angeführten Kräfte zu bestimmen. Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t).$$

(a) Rechteckpuls: $F(0 \le t \le \tau) = A$ und $F(t < 0) = 0$. Plotten Sie die Lösung für $0 < t < 10/\omega_0$ für $\tau = 2.3/\omega_0$ und $\tau = 8\omega_0$. (2 Punkte)

(b) Konstante Kraft: $F(t \ge 0) = A$ and $F(t < 0) = 0$. Plotten Sie die Lösung für $0 < t < 10/\omega_0$. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen für die Kräfte $F_1(t)$ respektive $F_2(t)$ sind, dann löst $x_1(t) + x_2(t)$ die Bewegungsgleichungen für $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$. (1 Punkt)

(d) Jede periodische Funktion kann in eine Summe von Sinus- und Kosinus oder alternativ in komplexe Exponentialfunktionen zerlegt werden. Diese Darstellung heißt Fourierreihe. (Für Beweis und Herleitung sei auf weiterführende Literatur verwiesen) Sei $f(t)$ periodisch mit Periode T. Die Fourierreihe von $f(t)$ ist gegeben als

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t},$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T dt f(t) e^{-in\omega t}$$

den Fourierkoeffizienten. Dieses Konzept, zusammen mit den Ergebnissen von Teil c), ist nützlich zum Lösen der Bewegungsgleichung für komplizierte Antriebskräfte $F(t)$. Lösen Sie den getriebenen harmonischen Oszillator für die Sägezahnfunktion $F(t) = 2\left(t/a - \lfloor \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \rfloor\right)$, wobei a die Periode ist und $\lfloor\ \rfloor$ die Gaußklammern. Welche Periode hat die Lösung? (4 Punkte)

Aufgabe 3: Greensfunktion des gedämpften harmonischen Oszillators

Betrachten Sie den gedämpften harmonischen Oszillator in einer Dimension:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

mit Dämpfungszeit τ und Frequenz ω_0 des Oszillators.

(a) Geben Sie die Gleichung an, die die Greensfunktion $G(t, t_0)$ des Systems erfüllt. (2 Punkte)

(b) Beschreiben und rechtfertigen Sie die Anfangsbedingung für G bei $t = t_0$. (1 Punkt)

(c) Integrieren Sie diese Bedingung von $t_0 - \epsilon$ bis $t_0 + \epsilon$ und leiten Sie eine Bedingung für $\dot{G}(t_0, t_0)$ her. Erläutern Sie nichttriviale Rechenschritte. (3 Punkte)

(d) Geben Sie die homogene Gleichung, die durch G erfüllt wird, sowie deren Gültigkeitsbereich an. (1 Punkt)

(e) Lösen Sie die Gleichung und benutzen Sie die Bedingungen aus b) und c) zum Herleiten von G. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Einfache Anwendung des Greensfunktionsformalismus in der Elektrostatik

Betrachten Sie eine geladene Kreisscheibe mit Flächenladungsdichte σ und Radius R, die in der (x, y) Ebene und zentriert um die z Achse liegt.

(a) Geben Sie die Ladungsdichte in Zylinderkoordinaten an. (1 Punkt)

(b) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Greensfunktion der Poissongleichung gegeben ist als:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion die Laplacegleichung

$$\Delta G = 0 \quad , \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$$

erfüllt (4 Punkte)

(c) Welche Ladungsverteilung generiert ein Potential, das dieser Greensfunktion entspricht? (1 Punkt)

(d) Leiten Sie das Potential auf der z Achse mithilfe der Greensfunktion her. (4 Punkte)