Theoretische Physik II

WS 2015/16 **19.11.2015**
Blatt 5 **Fälligkeitsdatum 26.11.2015**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter oder besuchen Sie das Tutorium. Einzelheiten zu Terminen und Ähnlichem finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1:

Betrachten Sie eine positive und eine negative Ladung gleichen Betrags. Der Abstand zwischen ihnen beträgt $2a$. Ein Referenzpunkt soll sich in einem Abstand $r \gg a$ von den beiden Ladungen befinden (ein sog. Punktdipol).

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld am Punkt $\vec{r} = (x, y)$, wobei sich die beiden Punktladungen auf der y-Achse befinden und gleichen Abstand vom Ursprung haben sollen.
(2 Punkte)

(b) Führen Sie eine Taylor-Entwicklung der Komponenten E_x und E_y des elektrischen Feldes (in Abhängigkeit von a) durch.
(4 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Leistung des eletrischen Dipols. Wieso unterscheidet Sie sich von der Leistung einer Punktladung?
(2 Punkte)

(d) Zeichnen Sie die Feldlinien eines regulären Dipols (für einen infinitesimal kleinen Abstand a) und die einer Punktladung (ein 2D-plot ist ausreichend).
(2 Punkte)

Aufgabe 2: Elektrische Multipole I

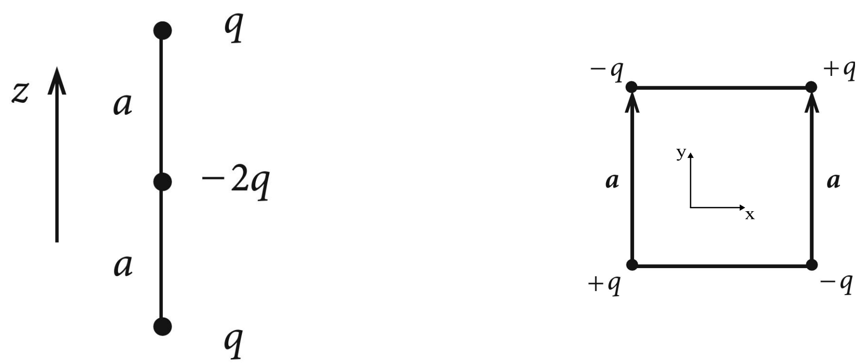


Abbildung 1: Gestreckter Quadrupol aus drei Ladungen (links) und quadratischer Quadrupol (rechts).

Berechnen Sie *explizit* die ersten Multipolmomente (Monopol, Dipol, Quadrupol) für folgende in Abb. (1) skizzierten Fälle

(a) Gestreckter Quadrupol. Legen Sie den Koordinatenursprung in die unterste Ladung. (4 Punkte)

(b) Quadratisch angeordneter Quadrupol. Legen Sie den Koordinatenursprung in die linke, untere Ladung. (4 Punkte)

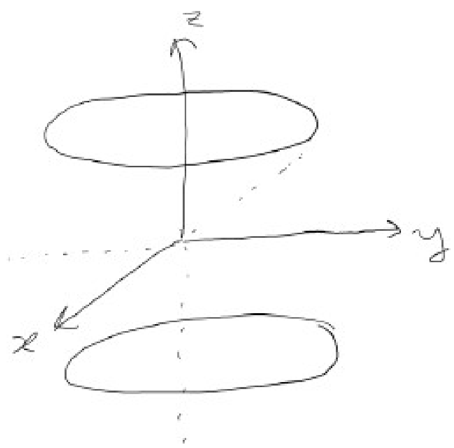
(c) Allgemein hängen die Multipolmomente von der Wahl des Ursprungs ab. Berechnen sie allgemein, wie sich das Dipolmoment bei Verschiebung der Koordinaten um $\vec{a}$ ändert, $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$. Überlegen Sie, was sich hieraus allgemein für die Abhängigkeit der Multipolmomente vom Ursprung ergibt. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Multipol-Symmetrien

Beachten Sie: Die Symmetrieeigenschaften sollen erarbeitet werden! D.h. Sie sollen mathematisch Argumentieren (Berechnen).

(a) Betrachten Sie n Paare entgegengesetzter Ladungen (gleichen Betrags). Jedes Paar ist in äquidistantem Abstand ober- und unterhalb der x-y-Ebene platziert (z.B. bei (x_i,y_i,z_i) und $(x_i,y_i,-z_i)$). Berechnen Sie das Monopolmoment.
(5 Punkte)

(b) Betrachten Sie nun zwei gleichmäßige Ladungsverteilungen entgegengesetzten Vorzeichens, welche sich im gleichen Abstand jeweils ober- und unterhalb der x-y-Ebene befinden. Berechnen Sie das Dipolmoment für den Fall dass sich die oberen und unteren Ladungen auf einem Kreisring gleichen Umfangs gleichmäßig anordnen (siehe Skizze).
(5 Punkte)



Aufgabe 4: Elektrische Multipole II

(a) Gegeben sei der Körper $\Omega = \left\{ x, y, z : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ mit homogener Ladungsdichte ρ_0. Berechnen Sie den zugehörigen Quadrupoltensor. (5 Punkte)

(b) Der Quadrupoltensor beschreibt die räumliche Ladungsverteilung und ist analog zum aus der Mechanik bekannten Trägheitstensor, welcher die Masseverteilung in einem ausgedehnten Körper charakterisiert. Berechnen Sie den Trägheitstensor für Ω, wobei auch hier eine homogene Masseverteilung mit Dichte ρ_M angenommen werden kann. (2 Punkte)

(c) Nehmen Sie an, dass

$$\rho_g(s) = \tilde{\rho}_0 \frac{4}{s_0^3} e^{-\frac{2s}{s_0}},$$
$$\rho_e(s) = \tilde{\rho}_0 \frac{1}{24 s_0^3} \left(\frac{s}{s_0}\right)^2 e^{-\frac{s}{s_0}}$$

die Ladungsverteilungen von Grundzustand und angeregtem Zustand sind. Ähnliche Funktionen ergeben sich beispielsweise für die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Energieniveaus im Wasserstoffatom. Die Variable s bezieht sich dabei auf den dimensionslosen Radius in elliptischen Koordinaten.

(i) Plotten Sie den Verlauf beider Funktionen in einem Koordinatensystem. (1 Punkt)

(ii) Berechnen Sie die nicht-verschwindenden Quadrupolmomente bezüglich beider Zustände und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. (2 Punkte)

Hinweis: Die Identität: $\int\limits_0^\infty s^n e^{-\frac{s}{s_0}} \mathrm{d}s \ = n! s_0^{n+1}$ für $s_0 > 0$ könnte nützlich sein.