Theoretische Physik II

WS 2015/16 **25.11.2015**
Blatt 6 **Fälligkeitsdatum 04.12.2015**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter oder besuchen Sie das Tutorium. Einzelheiten zu Terminen und Ähnlichem finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Dipol

Zwei Punktladungen q und $-q$ befinden sich auf der z-Achse bei $z = +a$ bzw. $z = -a$.

a) Entwickeln Sie das elektrostatische Potenzial in Kugelfläschenfunktionen und Potenzen von r für die beiden Fälle $r > a$ und $r < a$. (4 Punkte)

b) Nehmen Sie unter Konstanthaltung des Produktes $qa = p/2$ den Grenzwert $a \to 0$ und finden Sie das Potenzial für $r \neq 0$. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Kugelflächenfunktionen

Um eine Intuition für Kugelflächenfunktionen zu entwickeln ist es gut zu sehen, welche Relationen für variierendes l und m zwischen ihnen bestehen. Erstellen Sie mit Hilfe einer geeigneten Software 3D-Plots für den Betrag der Kugelflächenfunktionen mit folgenden Parametern:

a) $\{l, m\} = \{0, 0\}$ and $\{l, m\} = \{1, 0\}, \{1, 1\}$.
(1 Punkt)

b) $\{l, m\} = \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}$ and $\{l, m\} = \{1, 0\}, \{2, 0\}, \{3, 0\}, \{4, 0\}$.
(1 Punkt)

c) $\{l, m\} = \{2, 1\}, \{3, 1\}, \{4, 1\}, \{5, 1\}$.
(1 Punkt)

d) $\{l, m\} = \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{4, 4\}$.
(1 Punkt)

e) $\{l, m\} = \{2, 1\}, \{3, 2\}, \{4, 3\}, \{5, 4\}$.
(1 Punkt)

Aufgabe 3: Geladener Zylinder

Betrachten Sie einen homogen geladenen, unendlich langen Zylinder mit Radius r_0. **Nutzen Sie die Poisson-Gleichung**, um das Potenzial in den beiden Regionen $r < r_0$ und $r > r_0$ zu berechnen.
(7 Punkte)

Aufgabe 4: Kugelflächenfunktionen und Multipolentwicklung

Betrachten Sie eine leicht deformierte Sphäre mit Radius:

$$R = R_0 \left(1 + \sum_{m=-2}^{2} a_{2m}^* Y_{2m}(\theta, \phi) \right), \quad |a_{2m}| \ll 1$$

und gleichmäßiger Flächenladungsdichte σ

a) Welche Form hat die Ladungsdichte $\rho(r, \theta, \phi)$? (1 Punkt)

b) Schreiben Sie das Multipolmoment q_{lm} als ein Winkelintegral von kombinierten Kugelflächenfunktionen nach Integration über die radiale Komponente auf. (2 Punkte)

c) Entickeln Sie das Moment aus b) bis zur ersten Ordnung in a_{2m}. (2 Punkte)

d) Folgern Sie das zugehörige Monopolmoment (2 Punkte)

e) Nutzen Sie die Orthogonalitätseigenschaft der Kugelflächenfunktionen um die restlichen, nicht verschwindenden Multipolmomente für $l > 0$ zu erhalten. (3 Punkte)

Aufgabe 5: Kügelflächenfunktionen und Multipolentwicklung, Teil 2

Betrachten Sie die folgende Ladungsverteilung:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 \exp(-r) \sin^2 \theta$$

a) Nutzen Sie die Kugelflächenfunktionen um die Multipolentwicklung des Potenzials niederzuschreiben und leiten Sie die nicht verschwindenden Momente her. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Form des Potenzials für große r mit einer Entwicklung in Legendre Polynomen. (3 Punkte)

c) Leiten Sie mittels Coulomb-Gesetz und einer Entwicklung in Kugelflächenfunktionen einen in allen Punkten des Raums gültigen Ausdruck des Potenzials her. (3 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass der in c) gefundenen Ausdruck für Punkte nahe am Ursprung folgendermaßen approximiert werden kann:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta) \right)$$

(2 Punkte)