Theoretische Physik II

WS 2015/16 **03.12.2015**
Blatt 7 **Fälligkeitsdatum 11.12.2015**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter oder besuchen Sie das Tutorium. E-Mail Adressen und Termine finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Multipolentwicklung

Sie werden in dieser Aufgabe die in Abb. (1) gezeigten Ladungsverteilungen mithilfe von Kugelflächenfunktionen studieren. Auf Blatt 5, Aufgabe 2 haben Sie bereits die kartesischen Multipolmomente berechnet (beachten Sie, dass dort das Koordinatensystem anders als in dieser Aufgabe vorgegeben ist).

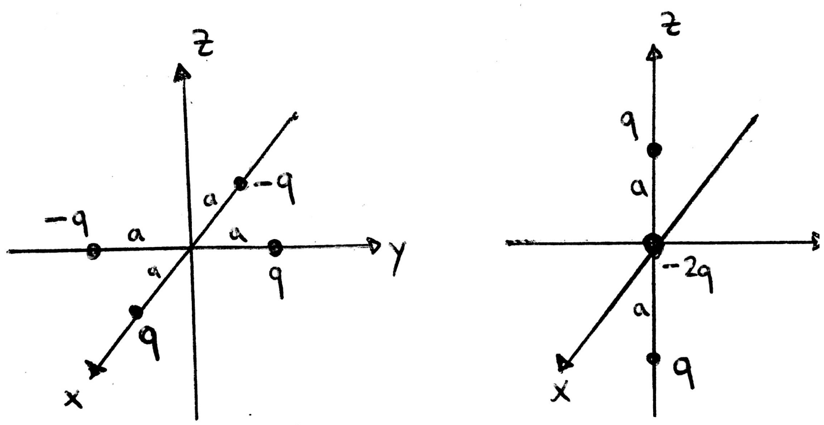

Abbildung 1: Ladungsverteilungen für Teil a) (links) und Teil b) (rechts).

(a) Berechnen Sie die Multipolmomente q_{lm} für Ladungsverteilung (a). Geben Sie einen Ausdruck an, der alle nicht-verschwindenden Momente (für beliebige l) beschreibt. Was können Sie über die Abhängigkeit von l sagen? Geben Sie die Elemente der ersten beiden nicht-verschwindenden Gruppen (bezogen auf l) an.
(4 Punkte)

(b) Verfahren Sie wie in a) für die Ladungsverteilung (b).
(4 Punkte)

(c) Führen Sie eine Multipolentwicklung für das Potential der Ladungsverteilung (b) bis zur niedrigsten Ordnung in a/r durch. Wann ist dies eine gültige Näherung?
(2 Punkte)

Aufgabe 2: Dirichlet-Randbedingungen im Quader

(a) Betrachten Sie die Laplace Gleichung $\nabla^2\Phi = 0$ in kartesischen Koordinaten. Finden Sie die allgemeine Lösung durch Separation der Variablen. Wie hängen die Konstanten zusammen?
(2 Punkte)

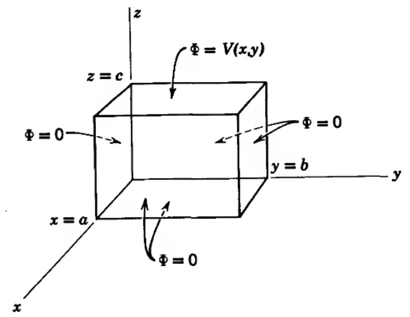

Abbildung 2: Quader mit Potential $V(x,y)$ auf der oberen Fläche. Alle anderen Flächen sind potentialfrei.

(b) Betrachten Sie nun die durch Abb. (2) gegebenen Dirichlet-Randbedingungen. Bestimmen Sie explizit die Lösung der Poissongleichung.
(2 Punkte)

(c) Für jedes V kann diese Lösung als Summe von Eigenfunktionen des Laplaceoperators geschrieben werden. Zeigen Sie, dass dies einer doppelten Fourierreihe entspricht und leiten Sie damit eine Integralform für die Koeffizienten der Entwicklung her.
(2 Punkte)

(d) Es sei $V = 1$. Bestimmen Sie die ersten 3 nicht-verschwindenden Koeffizienten.
(3 Punkte)

(e) Wie würden Sie das System lösen, wenn mehr als eine Fläche nicht-verschwindendes Potential tragen würde?
(1 Punkt)

Aufgabe 3: Methode der Spiegelladungen

(a) Betrachten Sie eine Linienladung der Länge d, die eine homogene Ladungsdichte ρ_l trägt und sich in der Höhe $z = h$ oberhalb einer in der x-y-Ebene liegenden dicken, leitenden Ebene befindet. Nutzen Sie die Methode der Spiegelladungen, um

(i) das elektrische Potential im gesamten Raum zu berechnen
(3 Punkte)

(ii) die elektrische Feldstärke an der Oberfläche der leitenden Ebene, unterhalb des Zentrums der Linienladung, anzugeben.
(2 Punkte)

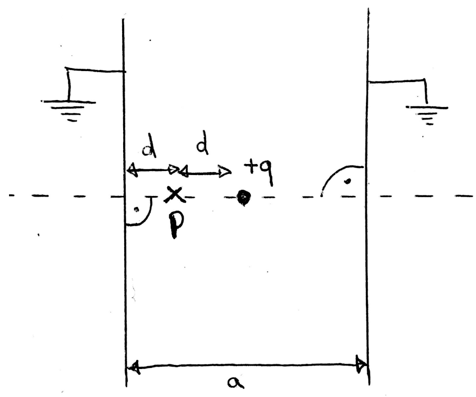

Abbildung 3: Punktladung zwischen zwei unendlich ausgedehnten leitenden Platten.

(b) Betrachten Sie eine Punktladung $+q$, $q > 0$, die sich in der Mitte zwischen zwei unendlich ausgedehnten, geerdeten Leiterplatten mit Abstand a zueinander befindet.

(i) Berechnen Sie mithilfe der Methode der Spiegelladungen das elektrische Potential im Punkt P, der sich im Abstand $d = a/4$ von einer der Platten befindet (siehe Abb. (3)).
(4 Punkte)

(ii) Untersuchen Sie numerisch, wie die Genauigkeit der Lösung von der Anzahl an Ladungen abhängt (stellen Sie aussagekräftige Ergebnisse in einer Tabelle dar). Verwenden Sie hierzu die Werte $d = 0.25\text{m}$ und $a = 1\text{m}$.
(1 Punkt)

Aufgabe 4: Geteilte Kugel

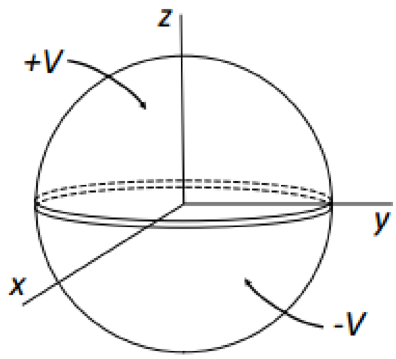

Abbildung 4: Kugelschale, deren Hälften durch eine dünne, isolierende Schicht voneinander getrennt sind. Die Oberflächen der Hälften liegen auf betragsmäßig gleichem Potential, allerdings mit entgegengesetztem Vorzeichen.

(a) Betrachten sie eine elektrische Spannung V auf einer Kugeloberfläche mit Radius r.

Die allgemeine Lösung ist von der Form (azimuthale Symmetrie)

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(cos\theta) \tag{1}$$

Benutzen Sie die Randbedingungen am Ursprung und im Unendlichen, um zu zeigen dass einige Vorfaktoren der Entwicklung verschwinden. Leiten Sie Integralausdrücke zum Bestimmen von A_l und B_l mithilfe der Orthogonalitätsbedingung der Legendrepolynome her. (3 Punkte)

(b) Betrachten Sie nun die Situation, die in Abb. (4) dargestellt wird. Die obere und untere Hälfte befinden sich auf betragsmäßig gleichem, aber entgegengesetztem Potential. Lösen Sie A_l und B_l innerhalb und außerhalb der Kugel.
(4 Punkte)

(c) Benutzen Sie die Rodrigues-Formel, um die ersten 3 Terme der Entwicklung zu vereinfachen. (3 Punkte)