Theoretische Physik II

WS 2015/16 **17.12.2015**
Blatt 9 **Fälligkeitsdatum 08.01.2016**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter oder besuchen Sie das Tutorium. E-Mail Adressen und Termine finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Wellenausbreitung in Leitern

Betrachten Sie in dieser Aufgabe einen homogenen, isotropen elektrischen Leiter. Nehmen Sie für alle Zeiten an, dass die Ladungsdichte verschwindet.

(a) Das Ohmsche Gesetz lautet $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Es verknüpft elektrisches Feld $\vec{E}$ über die Leitfähigkeit σ des Leiters mit der in ihm auftretenden Stromdichte $\vec{j}$. Schreiben Sie damit die Maxwellgleichungen um und zeigen Sie, dass diese folgende Form annehmen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Hierbei bezeichnet $u = (\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r)^{-1/2}$ die Wellengeschwindigkeit im Leiter.
(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie mithilfe der obigen modifizierten Maxwellgleichungen, dass die Telegraphengleichung

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right] \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

gilt.
(2 Punkte)

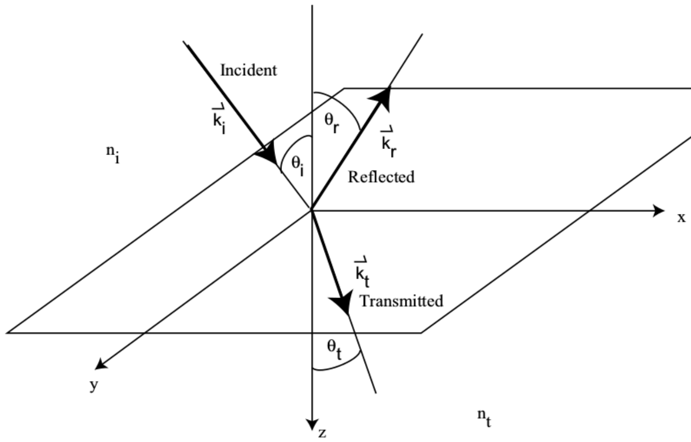
(c) Verwenden Sie zur Lösung der Telegraphengleichung den Ansatz $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ und führen Sie die komplexe Dielektrizitätskonstante $\bar{\epsilon}_r \equiv \epsilon_r + i\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$ ein. Zeigen Sie damit, dass die Einführung dieser Größe auf die Gleichung

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{\bar{u}^2}\right) \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$$

führt, wobei $\bar{u} = (\epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \mu_0 \mu_r)^{-1/2}$ die modifizierte Wellengeschwindigkeit ist.
(2 Punkte)

(d) Lösen Sie nun die Telegraphengleichung, indem Sie weiterhin einen komplexen Brechungsindex $\bar{n} = \sqrt{\bar{\epsilon}_r \mu_r} - i\gamma$ einführen. Wie sieht die Dynamik der Lösung aus?
(3 Punkte)

Aufgabe 2: Lichtbrechung



(a) Geben Sie die Wellengleichung für einfallende, reflektierte und gebrochene Welle auf der Oberfläche an (Siehe Zeichnung). (3 Punkte)

(b) Das Argument der oszillierenden Funtionen muss bei $z = 0$ gleich sein, um eine konstante Bedingung an die Amplituden zu gewährleisten. Nutzen Sie dies um eine Relation zwischen den verschiedenen Komponenten des Wellenvektors herzuleiten. (2 Punkte)

(c) Geben Sie den Wellenvektor in Polarkoordinaten an und leiten Sie das Reflexionsgesetz her. (2 Punkte)

(d) Nutzen Sie die Lichtgeschwindigkeit in Medien (c/n), um das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Koaxialkabel

Betrachten Sie ein zylindrisches Koaxialkabel entlang der z-Achse, dessen Innenleiter (Radius a) durch ein dielektrisches Medium (konstante Dielektrizitätszahl ϵ, $\mu = \mu_0$) vom äußeren Leiter (zylindrische Hülle, Radius $b > a$) getrennt ist. Diese Trennung ist nötig, damit sich sogenannte TEM (Transversalelektromagnetisch) Wellen ausbreiten können. Hierbei verschwinden sowohl elektrischer als auch magnetischer Anteil in Ausbreitungsrichtung ($B_z = E_z = 0$).

(a) Zeigen Sie, dass die z-abhängige Spannungsdifferenz zwischen beiden Leitern,

$$V(z) = \int_a^b E_\rho(\rho, z) \mathrm{d}\rho \tag{1}$$

und der Strom durch den Innenleiter,

$$I(z) = \int_0^{2\pi} H_\phi(a, z) a \mathrm{d}\phi \tag{2}$$

folgenden Telegraphengleichungen genügen:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -i\omega L I(z) \tag{3}$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -(G + i\omega C)V(z) \tag{4}$$

Hier bezeichnen $L = \mu / \left(2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ die Induktivität, $C = 2\pi\,\mathrm{Re}\,(\epsilon)\,/\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ die Kapazität und $G = -2\pi\omega\,\mathrm{Im}\,(\epsilon)\,/\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ den Leitwert des Koaxialkabels. Beachten Sie, dass analog zu Aufgabe 1 eine komplexe Dielektrizitätszahl verwendet wird, die letztlich ein Modell für Leistungsverluste liefert.
(4 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ, z) und verwenden Sie die azimuthale Symmetrie. Zeigen Sie zunächst, dass $E_\rho = h(z)/\rho$ und $B_\phi = g(z)/\rho$ für ebene TEM Wellen als Lösung der Maxwellgleichungen im dielektrischen Medium gilt. Eliminieren Sie danach mithilfe von Glg. (1) und Glg. (2) die beiden Funktionen $h(z)$ und $g(z)$.

(b) Nehmen Sie an, dass das Koaxialkabel verlustfrei ist ($G = 0$, $R = 0$) und dass Spannung/Strom unabhängig von z sind: $I(z) = I_0$, $V(z) = V_0$. Integrieren Sie den Poynting-Vektor über den Querschnitt des Kabels und berechnen Sie einen Ausdruck für den Leistungsfluss P_0 in z-Richtung.
(3 Punkte)

Hinweis: $B_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho}, \quad E_\rho = \frac{V_0}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$

(c) Betrachten Sie nun das verlustbehaftete Kabel ($G \neq 0$). Berechnen Sie die dielektrischen Verluste pro Einheitslänge des Kabels, indem Sie das Integral

$$P_V = \frac{\omega\,\mathrm{Im}\,(\epsilon)}{2} \int_V |E_\rho|^2 \mathrm{d}V$$

über 1 Meter Kabellänge auswerten.
(2 Punkte)

(d) Für einen verlustbehafteten Oszillator lässt sich der sogenannte Q-Faktor definieren, der angibt, wie viele Oszillationen stattfinden, bevor ein erheblicher Energieverlust verzeichnet wird. Geben Sie $Q(\omega) = \omega \frac{P_0}{P_V}$ für das verlustbehaftete Koaxialkabel an.
(1 Punkt)

Aufgabe 4: Polarisation & Stokesvektor

(a) Betrachten Sie eine propagierende Welle mit links- und rechtszirkular polarisierten Elementen E_+ und E_-. Zeigen Sie, dass die Relation $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$ eine elliptische Polarisation bedeutet.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die 4 Elemente des Stokesvektors, welche gegeben sind als

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2 \tag{5}$$

$$Q = |E_x|^2 - |E_y|^2 \tag{6}$$

$$U = 2\mathrm{Re}(E_x E_y) \tag{7}$$

$$V = -2\mathrm{Im}(E_x E_y) \tag{8}$$

jeweils

(i) in der rechts-/linkszirkular polarisierten Basis, (2 Punkte)

(ii) im Hauptachsensystem der Ellipse. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass alle Stokesparameter durch Messung der Intensität bestimmt werden können.
(1 Punkt)