Theoretische Physik II

WS 2015/16 **07.01.2016**
Blatt 10 **Fälligkeitsdatum 15.01.2016**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter. Die Einteilung und E-Mail Adressen finden Sie auf unserer Homepage.

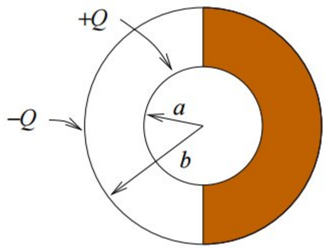
Aufgabe 1: Dielektrische Halbkugelschale

Zwei konzentrische Sphären mit innerem und äußerem Radius a und b tragen die Ladung Q. Der Raum zwischen den beiden Sphären sei halb gefüllt mit einem dieleketrischen Medium mit Dielektrizitätskonstante ϵ/ϵ_0 (vgl. Abbildung)

(a) Finden Sie das eletrische Feld überall zwischen den beiden Sphären.
(4 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Oberflächenladungsverteilung auf der inneren Sphäre.
(3 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Polarisationsladungsdichte, die auf der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = a$ hervorgerufen wird.
(3 Punkte)



Aufgabe 2: Grenze der Übertragungsgeschwindigkeit

In einem diespersiven Medium sind die Permiabilität

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 + \frac{Nq^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$

und Wellenvektor

$$\tilde{k} = \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}\omega.$$

beides komplexe Größen.

(a) Wenn die Summe im Ausdruck für $\tilde{\epsilon}$ im Vergleich zu ϵ_0 klein ist, kann $\widetilde{epsilon}$ in der Wurzel genähert werden $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Finden Sie mit $\mu = \mu_0$ und $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c^{-1}$ die zugehörige Form von $\tilde{k}$.
(2 Punkte)

(b) Die Lösung zur zugehörigen Wellengleichung lautet $\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$. Zeigen Sie für Frequenzen unleich der Resonanzfrequenz ω_j und kleinen Dämpfungsfaktor γ_j, dass $\tilde{k}$ durch einen reellen Vektor approximiert werden kann.
(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit der Wellen. Können solche Wellen eine höhere Phasengeschwindigkeit als c besitzen?
(3 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit der Wellen. Können solche Wellen eine höhere Gruppengeschwindigkeit als c besitzen?
(3 Punkte)

Aufgabe 3: Plasmonen

Betrachten Sie eine unendlich lange Leiterplatte $(x0z)$ im Vakuum. Diese Platte trägt Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c, die durch eine Flächenstromdichte $\mathbf{j}_s$ unabhängig von x charakterisiert sind

$$\mathbf{j}_s = j_a \exp(iKz - \omega t)\mathbf{e}_z,$$

wobei j_a und K reelle positive Kostanten sind.

(a) Nutzen Sie das Prinzip der Ladungserhaltung um die Oberlächenladungsdichte $\sigma(z,t)$ herzuleiten. (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld, welches durch $\sigma(z,t)$ hervorgerufen wird die Form

$$\mathbf{E} = E_y(y,z,t)\mathbf{e}_y + E_z(y,z,t)\mathbf{e}_z$$

besitzt. (1 Punkt)

(c) Geben Sie den Grenzwert von E_y für $y \to 0^+$ an. (1 Punkt)

(d) Wir nehmen an, dass $k = \omega/c < K$. Leiten Sie den Ausdruck für E_y und E_z im Falle $y > 0$ her. (3 Punkte)

(e) Nehmen Sie Stellung zum in d) erhaltenen Ergebnis, indem Sie die wichtigsten Eigenschaften des Feldes für $y > 0$ auflisten. (1 Punkt)

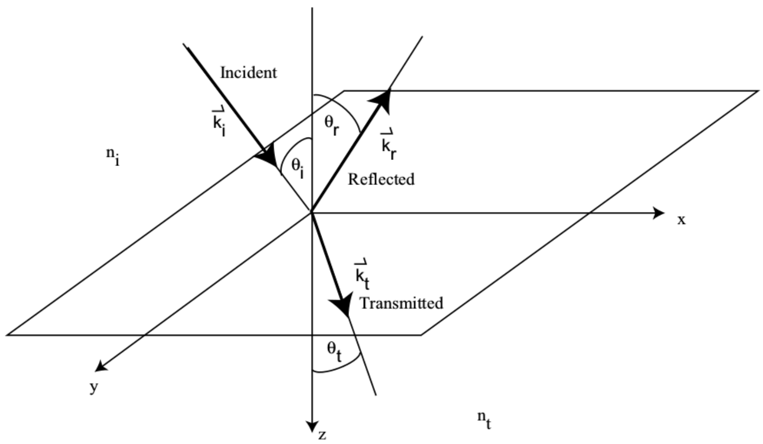
(f) Die komplexe Geschwindigkeit der Elektronen in der Metallplatte ist gegeben durch:

$$v = -e\frac{E_z(y=0,z,t)}{\mathrm{i}m\omega},$$

mit der Elektronenladung e und zugehöriger Masse m. Leiten Sie die Dispersionsrelation zwischen ω und K für Wellen her, die in der Metallplatte propagieren. Diese Wellen nennt man auch Oberflächenplasmonen. (2 Punkte)

(g) Warum kann eine fortschreitende ebene Welle, die aus dem Vakuum kommt und die Metallplatte erreicht keine Oberflächenplasmonen erzeugen? (1 Punkt)

Aufgabe 4: Lichtbrechung



(a) Geben Sie die Wellengleichung für einfallende, reflektierte und gebrochene Welle auf der Oberfläche an (Siehe Zeichnung). (3 Punkte)

(b) Das Argument der oszillierenden Funtionen muss bei $z = 0$ gleich sein, um eine konstante Bedingung an die Amplituden zu gewährleisten. Nutzen Sie dies um eine Relation zwischen den verschiedenen Komponenten des Wellenvektors herzuleiten. (2 Punkte)

(c) Geben Sie den Wellenvektor in Polarkoordinaten an und leiten Sie das Reflexionsgesetz her. (2 Punkte)

(d) Nutzen Sie die Lichtgeschwindigkeit in Medien (c/n), um das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten. (3 Punkte)