Theoretische Physik II

WS 2015/16 **14.01.2016**
Blatt 11 **Fälligkeitsdatum 22.01.2016**

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter. Die Einteilung und E-Mail Adressen finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Plasmonen

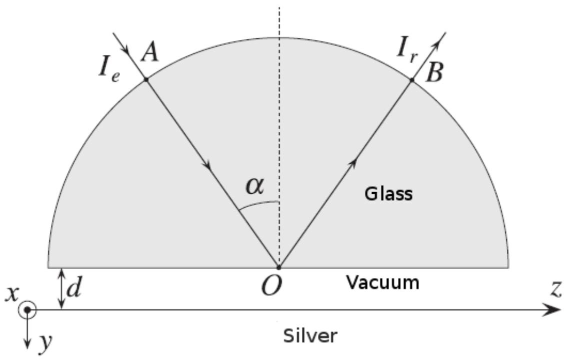

Abbildung 1: Beispiel eines experimentellen Aufbaus zur Plasmongenerierung.

Betrachten Sie die Hälfte eines Glaszylinders mit Brechungsindex n, die von einer Silberplatte durch die Entfernung d separiert ist (vgl. Abb. 1). Eine elektromagnetische Welle der intensität I_e trifft orthogonal zur Tangentenfläche des Zylinders ein, also ohne jegliche Ablenkung. Weiterhin gehen wir davon aus, dass die Welle am Punkt O totalrefkletiert wird, bevor Sie das Glas mit Intensität I_r verlässt. Sie können hier die Ergebnisse aus der vorangegangenen Aufgabe verwenden.

(a) Zeigen Sie, dass eine evaneszente Welle zwischen dem Glas und der Silberplatte existiert und geben Sie deren y, z, t Abhängigkeit an.
Hinweis: Nutzen Sie eine erweiterte Version des Brechungsgesetzes mit einem komplexen Brechungswinkel r, so dass $\cos(r) = \mathrm{i}\beta$ und zeigen Sie, dass β reell und positiv sein muss. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass diese evaneszente Welle eine Plasmonmode im Metall erzeugen kann. (1 Punkt)

(c) Leiten Sie die Frequenz ω dieser Oberflächenplasmonmode her, indem Sie

$$\Omega_S = \frac{\rho e^2}{\epsilon_0 m c},$$

mit ρ der Anzahl von Elektronen pro Oberflächeneinheit. (2 Punkte)

(d) Wie macht sich diese Plasmonerzeugung am Punkt B bemerkbar? Denken Sie sich ein Protokoll aus, um ω experimentell zu bestimmen, unter der Annahme, dass n und Ω_S bekannt sind. (3 Punkte)

(e) Geben Sie die Form von ω an, wenn man die Vakuumschicht zwischen Glas und Metal durch eine Flüssigkeitsschicht ersetzt. Folgern Sie einen Weg um Unreinheiten in einer Flüssigkeit zu detektieren. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Retardierte Potentiale einer beliebig bewegten Punktladung

Bei bekannter Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ lassen sich die Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in der Lorenz-Eichung (zumindest im Prinzip) berechnen durch

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t' \, \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} - t\right) \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) . \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $\delta(x)$ das Dirac-Delta, welches seinen Ursprung in der Kausalität hat: die *Wirkung* am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t hat ihre *Ursache* am Ort $\mathbf{r}'$ zur retardierten Zeit $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.
Nachdem die Potentiale berechnet sind, ergeben sich das elektrische und magnetische Feld durch

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{4}$$

In dieser Aufgabe betrachten wird eine einzelne Punktladung q, die einer beliebigen Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$ folgt, und berechnen dafür die obigen Potentiale und Felder.

(a) Geben Sie die Ausdrücke für die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bei gegebener Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$ an. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Potentiale gegeben sind durch

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\beta})\, |\mathbf{R}|}\right]_{\text{ret}} \tag{5}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}_0}{(1 - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\beta})\, |\mathbf{R}|}\right]_{\text{ret}}, \tag{6}$$

wobei $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $\mathbf{e} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$ und $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{r}}_0(t')/c$ bezeichnen und der Index „ret“ darauf hinweist die in der eckigen Klammer stehenden Größen zur retardierten Zeit

$$ct' = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \tag{7}$$

zu nehmen. (2,5 Punkte)
Hinweis: Es gilt die Identität $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$, wobei die Summe über alle Nullstellen von f läuft.

(c) Zeigen Sie, dass sich das elektrische Feld über Gl. 4 zu

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{b^3}\left(\frac{\mathbf{e}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2|\mathbf{R}|^2} + \frac{\mathbf{e}\times[(\mathbf{e}-\boldsymbol{\beta})]\times\mathbf{a}}{c^2|\mathbf{R}|}\right)\right]_{\text{ret}} \tag{8}$$

ergibt mit $\gamma = \left(1-|\boldsymbol{\beta}|^2\right)^{-1/2}$ und $b = 1 - \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\beta}$. (6 Punkte)
Hinweis: Beachten Sie bei Ausführung einer partiellen Ableitung, dass die retardierte Zeit t' über Gl. 7 auch implizit von $\mathbf{r}$ und t abhängen. Zeigen Sie also zuerst, dass gilt

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{e}}{cb} \tag{9}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{b}. \tag{10}$$

Es gilt die Identität $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

(d) In diesem Aufgabenteil soll der von der Ladung ausgehende Energiestrom berechnet werden. Dafür ist es ausreichend nur den *Strahlungsanteil*

$$\mathbf{E}_{\text{Strahl.}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{e}\times[(\mathbf{e}-\boldsymbol{\beta})\times\mathbf{a}]}{b^3c^2|\mathbf{R}|}\right]_{\text{ret}}, \tag{11}$$

des elektrischen Feldes, also den Term in Gl. 8, der lediglich wie r^{-1} abfällt, zu betrachten. Das magnetische Feld ist dann geben durch $\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\mathbf{e}\times\mathbf{E}_{\text{Strahl.}})$.
Zeigen Sie, dass der Energiestrom durch das Raumelement $\mathrm{d}\Omega$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = |\mathbf{R}|^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{e} \tag{12}$$

für ein nicht-relativistisches Teilchen $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ gegeben ist durch

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{16\pi c^3\varepsilon_0}|\mathbf{a}|^2\sin^2(\theta), \tag{13}$$

wobei $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}_{\text{Strahl.}}\times\mathbf{B}_{\text{Strahl.}}$ den Poynting-Vektor und θ den Winkel zwischen $\mathbf{e}$ und $\mathbf{a}$ bezeichnen. (3,5 Punkte)

Aufgabe 3: Poynting-Vektor und lineare Antenne

Der Stromfluss im Inneren einer Antenne der Länge d entlang der z-Achse lässt sich durch

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = I\sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right)\delta(x)\delta(y) \tag{14}$$

beschreiben, wobei $|z| \leq d/2$. Das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ in der Lorentz-Eichung lässt sich gemäß Aufgabe 2 berechnen. Nehmen Sie an, dass sich Orts- und Zeitabhängigkeit in der Weise $\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ separieren lassen.

(a) Leiten Sie mithilfe der Näherung $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx r - \hat{e}_r\cdot\mathbf{x}'$ für $rk \gg 1$ einen Ausdruck für den Ortsanteil des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ her, der nur noch von $r = |\mathbf{x}|$, $\theta = \measuredangle(\hat{e}_z,\mathbf{x})$ und Strom I abhängt. (3 Punkte)

(b) Für ebene Wellen lässt sich die Wirkung des Nabla-Operators beschreiben als $\nabla \to i\mathbf{k}$, wobei $\mathbf{k} = k\hat{e}_k$ der Wellenvektor ist. Wir betrachten daher für diese Aufgabe im Folgenden die Feldgleichungen

$$\mathbf{B} = ik\hat{e}_k \times \mathbf{A} \tag{15}$$

$$\mathbf{E} = \frac{ikZ_0}{\mu_0}(\hat{e}_k \times \mathbf{A}) \times \hat{e}_k, \quad Z_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}. \tag{16}$$

Hieraus lässt sich der Poynting-Vektor $\mathbf{S} = 1/\mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ berechnen, der Ihnen Informationen über den Leistungsfluss liefert. Zeigen Sie zunächst, dass sich der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor für beliebige EM-Felder (mitteln Sie über eine Periode $T = 2\pi/\omega$) schreiben lässt als

$$\mathbf{S}_{avg} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\right). \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Hinweis: Betrachten Sie Felder der Form $\mathrm{Re}\left((\mathbf{F}_{\mathrm{real}} + i\mathbf{F}_{\mathrm{imag}})e^{i\omega t}\right)$

(c) Berechnen Sie die pro Raumwinkel abgestrahlte Leistung, die sich für einen Dipol aus $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(r^2\hat{e}_k \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)\right)$ ergibt. Unterscheiden Sie explizit die Fälle $kd = 2\pi$ und $kd = \pi$. (1 Punkt)

Aufgabe 4: Residuensatz

Berechnen Sie folgende Integrale unter Zuhilfenahme des Residuensatzes.

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$
(2 Punkte)

(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x \qquad a \in \mathbb{R}$
(2 Punkte)

(c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \qquad a, \alpha \in \mathbb{R}$
(3 Punkte)

(d) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{2+\sin(x)}\mathrm{d}x$
(3 Punkte)