

Theoretische Physik II

WS 2015/16
Blatt 13

28.01.2016
Fälligkeitsdatum 05.02.2016

Bei Fragen zum Übungsbetrieb und Übungsblättern wenden Sie sich bitte an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter. Die Einteilung und E-Mail Adressen finden Sie auf unserer Homepage.

Aufgabe 1: Paradoxon von Leiter und Garage – Teil 2

Betrachten Sie wieder das in Aufgabe 4 von Blatt 12 aufgezeigte Paradoxon. Das Ruhesystem der Garage bzw. der Leiter werden dabei mit I bzw. I' bezeichnet. Die Länge der Garage wird mit L_G (gemessen im System I) bzw. L'_G (gemessen in I') bezeichnet (analoges gilt für die Länge der Leiter).

- (a) Geben Sie die Raumzeitkoordinaten $x^\mu = (ct, x)$ der beiden Ereignisse (siehe Aufgabe 4, Blatt 12) in den beiden Inertialsystemen an. (4 Punkte)
- (b) Die Raumzeitkoordinaten eines Ereignisses x^μ und x'^μ in zwei Inertialsystemen I und I' sind über eine Lorentztransformation miteinander verknüpft:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

(hier wurde Einsteinsche Summenkonvention verwendet). Wie sieht die Lorentztransformation Λ^μ_ν in dem hier betrachteten Fall aus? Wie sind die auftretenden Längen miteinander verknüpft? (4 Punkte)

Aufgabe 2: Lorentz-Boost & Bezugssysteme

- (a) Betrachten Sie eine unendlich lange Linienladung mit Linienladungsdichte λ , die sich im Inertialsystem (IS) \mathcal{S} in Ruhe befindet. Das IS \mathcal{S}' bewegt sich (zusammen mit der Linienladung) bzgl. des Laborsystems \mathcal{S} mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} parallel zur Linienladung.
 - (i) Geben Sie die elektrischen und magnetischen Felder im Ruhesystem der Linienladung an (geeignete Koordinaten wählen). Nutzen Sie einen Lorentz-Boost, um die Felder im Laborsystem zu bestimmen. (3 Punkte)
 - (ii) Wie lauten die Ladungs- und Stromdichten in den IS $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$? (1 Punkt)
 - (iii) Berechnen Sie ausgehend von Ladungs- und Stromdichten im IS \mathcal{S}' direkt elektrisches und magnetisches Feld im selben System. Vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen aus Teil i). (2 Punkte)
- (b) Betrachten Sie nun eine ähnliche Situation: Im IS \mathcal{S} bewege sich eine unendlich geradlinig ausgedehnte Reihe positiver Ladungen mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{z}$ nach rechts. Der Abstand zwischen den Ladungen sei so gering, dass sie als kontinuierliche Linienladungsdichte $\lambda = q/l$ betrachtet werden kann. Zusätzlich bewegt sich im IS \mathcal{S} eine Testladung Q_T mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u} = u\hat{z}$. Der Abstand zwischen Testladung und bewegter Linienladung betrage ρ . Das Ruhesystem der Testladung wird mit \mathcal{S}' bezeichnet.

- (i) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v' , mit der sich die Linienladung bzgl. des IS \mathcal{S}' bewegt. (1 Punkt)
- (ii) Untersuchen Sie wie die Linienladungsdichte im IS \mathcal{S}' von der Linienladungsdichte im Ruhesystem der Linienladung abhängt. Überprüfen Sie Ihr Ergebniss auf Konsistenz. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Lorentz-Gruppe

Mithilfe des metrischen Tensors $\{g_{\mu\nu}\} = G$ lässt sich das innere Produkt zweier Vierervektoren A und B schreiben als

$$A \cdot B = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A^T G B.$$

In Viererschreibweise lässt sich der Lorentz-Boost in ein gestrichenes Koordinatensystem ausdrücken durch

$$P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu,$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix Λ die Beziehung

$$\Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$$

erfüllt, indem Sie ausnutzen, dass sich das innere Produkt zweier Vierervektoren unter einer Lorentztransformation nicht ändert. (4 Punkte)

- (b) Weisen Sie nach, dass Lorentztransformationen Λ eine Gruppe im mathematischen Sinne bilden. (6 Punkte)

Aufgabe 4: Compton-Streuung

In dieser Aufgabe betrachten wir den elastischen Stoß eines Photons mit Frequenz f mit einem Elektron. Das Koordinatensystem soll dabei so gelegt werden, dass das Elektron vor dem Stoß im Ursprung ruht, und das Photon sich entlang der positiven x -Achse ausbreitet. Durch den Stoß kommt es zu einem Energie- und Impulsübertrag auf das Elektron, und das Photon mit neuer Frequenz f' wird um den Winkel Θ aus der ursprünglichen Richtung abgelenkt.

Zeigen Sie unter Ausnutzung der Viererimpulserhaltung, dass gilt

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos(\Theta)), \tag{1}$$

wobei die Compton-Wellenlänge gegeben ist durch $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$. (12 Punkte)

Hinweis: der Viererimpuls ist gegeben durch $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$, wobei die Gesamtenergie eines Teilchens gegeben ist durch $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ mit m als Ruhemasse des Teilchens. Photonen besitzen dabei eine verschwindende Ruhemasse. Die Eigenschaft $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$ könnte nützlich sein.