Theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik
Übungsblatt 13

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Michael Kaicher, M.Sc.
Andrii Sokolov, M.Sc.

WS 2018/2019 **Abgabe 30.1.2019**

Info: *Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Tunnelnde Elektronen (*20 Punkte*)

Shot noise ist ein Effekt, welcher immer dann zu beobachten ist, wenn eine Menge an Ladungsträgern eine Potentialbarriere (siehe Abbildung) überwinden muss. Der elektrische Strom I setzt sich aus der Bewegung der einzelnen Elektronen zusammen. Da jedes Elektron „für sich"die Potentialbarrier überwinden muss, lässt sich das Verhalten des Stromes beim überwinden der Potentialbarriere durch einen statistischen Prozess Beschreiben. Die (klassisch unüberwindbare) Potentialbarriere kann dabei mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit von jedem einzelnen Elektron überwunden werden.

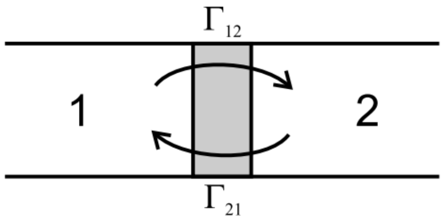

Abbildung 1: Tunnelkontakt: Isolierende Schicht (dunkel grau) zwischen Bereich 1 und 2 veranschaulicht Potentialbarriere, die jedes einzelne Elektron spürt.

Im Granzfall vieler Elektronen und geringer Tunnelwahrscheinlichkeit, kann der Strom als stochastische Variable betrachtet werden,

$$e^- n(\tau) = \int_0^\tau dt I(t) \;\Rightarrow\; I(t) = e^- \left.\frac{dn(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=t} = e^- \sum_{j=1}^{n(\tau)} \delta(t-t_j), \tag{1}$$

wobei τ das endliche Zeitintervall des Tunnelstroms und t_j stochastisch gleichverteilte Zeiten (bei denen jeweils ein Elektron tunnelt) beschreibt, $n(\tau)$ die Anzahl der getunnelten Elektronen im Zeitintervall τ und e^- die Elekronenladung ist.
Da die statistische Verteilung der Variablen t_j einer Poissonverteilung folgt, berechnen sich Mittelwerte gemäss

$$\langle X(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\tau\Gamma_{12}} \frac{\Gamma_{12}^n}{n!} \int_0^\tau dt_1 \cdots \int_0^\tau dt_n X(t, t_1, \ldots, t_n). \tag{2}$$

a) Berechnen Sie $\langle I(t)\rangle$ und folgern Sie aus Ihrem Ergebnis eine sinnvolle physikalische Interpretation der Grösse Γ_{12}. (*3 Punkte*)

b) Wir sind nun an der zeitlichen Entwicklung des Erwartungswertes des Stroms interessiert. Berechnen Sie $\langle I(t)I(t')\rangle$ und damit die Korrelationen der Stromfluktuationen $\delta I(t) = I(t) - \langle I(t)\rangle$, also $\langle \delta I(t)\delta(I(t'))\rangle$. (*5 Punkte*)

c) Nun dürfen Elektronen auch in die Gegenrichtung tunneln (beschrieben durch den Parameter Γ_{21}). Zeigen Sie, dass nun

$$\langle I(t)\rangle = e(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}) \tag{3}$$

gilt und berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle I(t)I(t')\rangle$. *(6 Punkte)*

d) Nach anlegen einer Spannung V (es gilt $\langle I\rangle = V/R$, mit R: Widerstand), welche das chemische Potential des Leiters 1 um $1eV$ gegenüber des chemischen Potentials des Leiters 2 anhebt, sollen Sie aus der *detailed balance* Relation

$$\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{21}} = \exp\left(\frac{e^{-}V}{k_B T}\right) \tag{4}$$

das thermische Rauschen eines Widerstands durch Berechnung der spektralen Dichte

$$S(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\langle \delta I(t)\delta I(0)\rangle \tag{5}$$

in Abhängigkeit von V und T berechnen und anschliessend den Grenzfall $k_B T \gg e^{-}V$ betrachten. *(6 Punkte)*

Aufgabe 2: Zentraler Grenzwertsatz am Beispiel eines in Raum und Zeit diskreten random-walks (*22 Punkte*)

Betrachten Sie ein eindimensionales Gitter mit unendlich vielen Gitterpunkten. Der Startpunkt zum Zeitpunkt $N = 0$ liegt in der Mitte bei $x = 0$. Mit einer Wahrscheinlichkeit p (q) wird in jedem Zeitschritt $\Delta N = 1$ zum rechts(links)-liegenden Gitterpunkt gesprungen, wobei $q = 1 - p$ gilt.

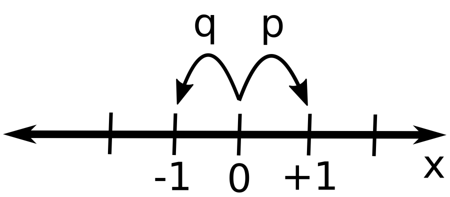

Abbildung 2: Random walk.

a) Bestimmen SIe die Mastergleichung, welche die Wahrscheinlichkeit $P(x, N+1)$ angibt, den walker zum Zeitpunkt $N+1$ am Ort x anzutreffen. *(3 Punkte)*

b) Die Invarianz der Mastergleichung bezüglich Translationen in Zeit und Raum legt zur Lösung der Mastergleichung eine z-Transformation nahe. Diese erhalten Sie indem Sie die linke (l) und rechte (r) Seite der Mastergleichung $l(x, N) = r(x, N)$ jeweils Fouriertransformieren und dann die Erzeugenden Funktionen anhängen,

$$\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty} z^{N+1}e^{ikx}l(x,N) = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty} z^{N+1}e^{ikx}r(x,N) \quad \text{(z-Transformation).} \tag{6}$$

Die Fouriertransformierte der Erzeugendenfunktion ist definiert als

$$P(k,z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{ikx}P(x,N). \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass

$$P(k,z) = \frac{1}{1 - zu(k)} \tag{8}$$

gilt, wobei $u(k) \equiv pe^{ikx} + qe^{-ikx}$.

Hinweis: Entwickeln Sie Gl. (8) *als Taylorreihe um Null.* *(8 Punkte)*

c) Geben Sie eine explizite Form für $P(x, N)$ an. *(7 Punkte)*

d) Für eine Binomialverteilung

$$\rho_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n!)} p^n q(N-n), \tag{9}$$

mit $1 = p + q$, endlichen ersten ($\langle n \rangle = pN$) und zweiten Momenten mit positiver Varianz $\sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{Npq}$, gilt (siehe Skript G. Schoen):

$$\lim_{N \to \infty} \rho_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{10}$$

Bestimmen Sie $P(x, N)$ im Grenzfall langer Zeiten. *(4 Punkte)*